微 分 方 程

——附应用及历史注记

[美] G. F. 塞蒙斯著
张理京 译

人 民 教 育 出 版 社

微 分 方 程
——附应用及历史注记
[美] G. F. 塞蒙斯著
张理京 译
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京新华印刷厂印装
*
开本 880×1230 1/32 印张14.75 字数340,000
1981年2月第1版 1981年11月第1次印刷
印数 00,001—15,500
书号 13012·0590 定价 1.45 元

序

对一个老学科写一本新教材，如果要使它值得人们认真注意，就必须体现以前这类书所未有的一种明确而合理的观点。这样的一种观点不可避免地反映了作者的经验、兴趣和偏爱，所以应该在开头就明确提出，使那些不同意这种观点的人可以去另觅养料。本书的结构和内容，在各个不同方面表达了我个人的意见如下。

微分方程在数学中的地位 300年来分析是数学里首要的分支，而微分方程又是分析的心脏。这是初等微积分的天然后继课，又是为了解物理科学的一门最重要的数学。而且在它所产生的较深的问题中，它又是高等分析里大部分思想和理论的根源。幂级数、福氏级数、嘎马函数与其他特殊函数、积分方程、存在定理、以及对于许多分析运算步骤该有严格论证的需要，所有这些问题都是在搞微分方程的过程中自然而然产生出来的。微分方程在其发展的较晚阶段，是引起以下各个分支的主要因素：复分析、福氏级数论以及更一般的正交函数展开理论、勒贝格积分、度量空间与希尔柏脱空间、以及近世数学中其他许多好题材。例如，我坚持认为复分析的主要思想之一是把幂级数从限制它的实数系统中解放出来；凡是曾试着只用实的幂级数解微分方程的人，都会十分清楚地感觉出这种动机。在植物学中，凡是想充分鉴赏植物开花过程的人，都必须对滋养和扶持花朵的根、茎、叶有相当的了解。在数学里也是同样的道理，但这往往被人忽视或遗忘。

在数学里也同在其他人类活动领域里一样常有一时的风尚，一个人常常难以区别当代成就中哪些是有永久价值的，而哪些只是眼前的一阵时髦。目下在我们数学研究院里有一股强大的抽象化潮流。这股潮流扫掉了许多别有特色的景致，而代之以秃光溜圆大石块似的一般理论。如果搞得不过分，这些一般理论是有用而又可嘉的；但它们的突出

地位产生了一个不幸的后果：如果一个学生不在大学时代学习一些象波动方程、高斯超几何级数、嘎马函数、以及变分法的基本问题(只此聊举数例)这些丰富多采而又有价值的内容，那末他以后就不大可能再去学。我认为非正式结识这类概念的自然场所，是在一本从容讲解微分方程入门知识的教科书里。读了现在的有些微分方程课本，使人觉得好比是乘坐一辆观光汽车，司机只是一心一意地尽快开车，想把游客按时送到目的地，而使游客很少甚至没有机会去欣赏沿途的景色。但我们宁愿有时偶或晚一点到达目的地，而能更多地领略路上的风光。

应用 除了变化，世间没有别的持久的东西，这已经是句老生常谈的话；而微分方程的首要目的是作为研究自然界变化规律的一种工具。因此一本讲微分方程的书如果不在一定程度上谈到其科学应用，就好比写一本研究蛋的著作而不提及蛋的繁殖作用那样无聊和不得要领。本书的结构是这样的，除了最末一章外，每章都至少有一个(而往往有好几个)大的"捞本"项目，其形式是该章方法所能解决的一个古典科学问题。这些应用包括：

速降线问题；

爱因斯坦公式 $E=mc^2$；

牛顿引力定律；

振动弦的波动方程；

量子力学中的谐振子；

势论；

振动膜的波动方程；

弱肉强食方程；

非线性力学；

哈米尔顿原理；以及

阿倍耳力学问题。

我认为对于这些问题的数学处理方法属于西方文明的主要光荣成果，而且相信读者也会同意的。

数学严格性问题　在纯数学的崇高境界里，想充当证明的任何论点，都必须经得起抱怀疑态度的行家对它的最苛刻的挑剔。那是搞这门行业的规则，如果你想搞这一行，你就得遵守这些规则。但是世上并非只有这一行。

在某几门数学里——也许在数论和抽象代数里，要求有高标准的严格证明，也许在各个阶段都是合适的。但在讲初等微分方程时，如果定要死守教条，讲得非常确切，那就等于挤去这个东西里面的鲜汁，而只剩下空壳。本书的主要目的是帮助读者掌握微分方程的精神实质；为此，我宁可有时讲得不太确切然而使人易懂，却不愿讲得十分准确但使人难于理解。我对于建立一种逻辑上无懈可击的数学结构毫无兴趣，在那样的著作中，定义、定理和严格证明焊接成严密的铜墙铁壁，使得想穿越它而前进的读者望而生畏。

尽管说了这些不好听的话，我也不时想把内容讲得相当严格，特别是在第十一章以及第四、五两章的附录A以及第八章的附录B里。我并不是说本书的其他部分就讲得不严格了，我只是说在其余部分我倾向于数学家中的实干派（这派人的主要目的是要想出解决科学问题的方法），而不倾向于沉思派——他们的工作是分析并整理实干派所搞出来的思想和方法。

有人可能认为数学论述或者是一种证明或者不是证明。但就初等分析而论，我不同意这种看法，反而认为证明的真正作用，是让心目中的读者或听众相信所讲内容是合理的。我觉得数学严格性好比衣服；它的式样必须适合情况，如果做得太肥或太紧，穿起来就不舒服，而且会限制行动自由。

历史与传记　亚美尼亚有句古话："不能体验过去，就只配生活在当代狭窄黑暗的环境中。"脱离历史来搞数学，就剥夺了数学的伟大之处；因为数学也象其他艺术一样——而数学是人类文明的无上艺术，它的辉煌之处在于它是人类的创造物。

在一个文化成批生产、官僚主义抹煞个性日甚一日的时代，我很高

兴地知道数学里的重要思想并不是由计算机打印出来或是由什么委员会投票通过的东西，而是少数杰出人物的独立劳动和个人天才的产物。本书里的许多传记性材料，反映了我的愿望：把这些非凡人物的一些成就和个人品质传达给读者。大部分较长的注记都放在附录里，但每篇都同正文里所讨论的特殊贡献有直接连系。这些注记所录的只不过是过去三百年间少数几个最伟大的数学家：费马，牛顿，伯努利家族，欧拉，拉格伦日，拉普拉斯，高斯，阿倍耳，哈米尔顿，利乌维勒，契比雪夫，厄尔米特，黎曼以及庞加莱。正如**T. S.** 艾利奥脱(**Eliot**)在他的一篇短文中所写的："有人说：'已故作家同我们关系很远，因为我们所知道的比他们多得多。'正是如此，我们所知道的就只是他们（的名字）。"

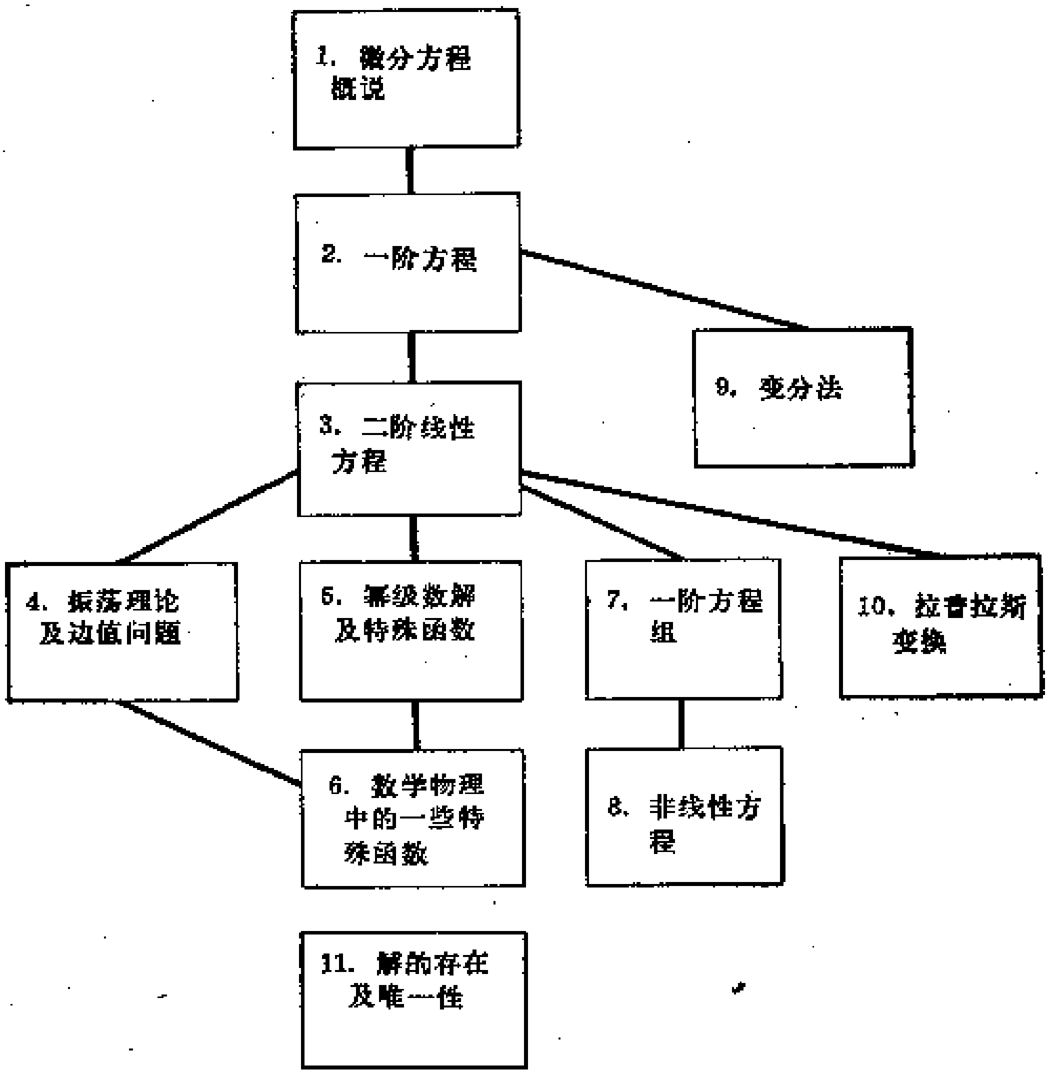
历史和传记是非常之复杂的，我也痛苦地意识到我这些注记里的材料，几乎没有一项确实象所写的那样简单。对于大多数学生读者所未曾听说过的许多数学思想，书中提得过于简略，这也是我不得不表示遗憾的。但只要有个好图书馆，一个足够好学的学生还是可以自己搞清楚大部分材料的。至少我所写的这些东西可以帮助读者感受到古典数学的丰富多采，而数学的这个侧面在一般大学课程里几乎是看不到的。

G. F. 塞蒙斯

给讲课教师的建议

下页图中给出了本书各章之间的逻辑依赖关系，并且随着教师的兴趣以及学生的程度和学习目标的不同，提出了本书的不同用法。

第一、二及九章相对地讲得颇为直捷了当，其中前两章的大部分材料常常放在微积分课程中讲授。第三章是整本书的基础。第四、五及六章讲二阶线性方程的较深理论以及级数解法，而第十章提供一种补充方法。第七、第八章是为学习二阶非线性方程作准备的，而第八、第十一章则最接近于我们这个时代的数学精神。最后告诫一句话：第28节



到第35节所含材料中有些地方颇难对付，教师若授课时数不多莫如免讲这些部分，只让那些最有雄心的学生去钻研。

* * * *

科学家研究自然并不是因为它有用；他研究它是因为他喜爱它，他喜爱它是因为它美。如果自然不美，它就不值得被人知道，而如果自然不值得知道，人也就不值得活下去。当然，我这里说的并不是那种激动感官的美——那种品质上和外观上的美；并不是由于我低估那种美，远远不是如此，但那种美跟科学不相干；我说的是各部分之间和谐有序的更深刻的美，是一个纯洁的心灵所能掌握的美。

H. 庞加莱

当一门数学学科离开它的经验源泉走得很远，或者更糟的是，如果它是第二代或第三代的学科，只是间接地受到来自“现实”思想的启发，那它就会充满严重的危险．它会变得越来越成为纯粹的矫揉造作，越来越纯粹地**为艺术而艺术**．这种情况不一定就是坏，如果这领域四周有许多与它相联系的学科，而那些学科仍跟经验有较密切的连系，或者，如果对那个领域有影响的人物具有非常成熟的学识和见解．但一门学科存在着依阻力最小的路线发展这种严重的危险，就象一条河流，离开它的源泉太远之后，分成许许多多涓细不足道的支流，使这门学科变成一大堆杂乱的细节和繁复的东西．换言之，一门数学学科在离开它的经验源泉太远之后，或者经过太多的“抽象”配种，它就有退化的危险．

J. 冯·诺依曼

正如逻辑推导必须辅之以直观一样，层层概括的愿望，也必须有对于丰富多采的细节的尊敬与爱好，来加以制约和平衡．不应把个别的问题贬低为崇高的一般理论的特例．事实上，一般理论是从特殊问题的考察中产生出来的，而且如果一般理论不能用来阐明或整理下面更特殊的实质材料，那它就是毫无意义的．一般与个别、推导与构筑、逻辑与想象力之间的相辅相成，这是活的数学的深刻精髓．在一项数学成就的核心里，都有数学的这一个或那一个侧面在起作用．在一项影响深远的发展工作中，所有这些因素都要在其中起作用．一般地说，这样的一项发展工作是从“实”地出发的，然后通过抽象甩掉头几节烧过的火箭壳，升入高空稀薄大气层，那里飞航更容易，视野更清楚；在这一飞翔之后，就进入重新着陆的关键性考验，并到达新测绘的个别“现实”低原中的特定目标．简言之，抽象概括的飞翔必须从具体的特定的问题出发并且又返回到那里．

R. 柯朗

目　录

第一章　微分方程概说

1. 引　　言

含有一个因变量及其对一个或更多个自变量的导数的方程，叫**微分方程**. 自然科学(物理、化学、生物及天文)中的许多一般规律，用微分方程的语言来表达最为自然. 微分方程在数学本身中，特别是在几何中的应用也很多，在工程、经济以及许多别的应用科学部门中都有应用.

微分方程之所以有这么广泛的用处，理由是不难理解的. 读者记得，若 $y=f(x)$ 是一给定的函数，则其导数 $\frac{dy}{dx}$ 可视为 y 对于 x 的变化率. 在任何自然过程中，有关的一些变量及其变化率之间，根据制约该过程的一些基本科学原理，是彼此有联系的. 这种联系用数学记号表达出来，结果往往是个微分方程.

下面的例子可以说明这些道理. 据牛顿第二运动定律，质量为 m 的一个物体，其加速度 a 正比于施加于其上的总力 F，其比例常数是 $1/m$，故有 $a=F/m$，或

$$ma=F. \tag{1}$$

现设质量为 m 的一个物体在只有引力作用影响的情况下自由下落. 这时作用于它的唯一的力是 mg，而 g 是引力所致的加速度①. 若 y 是物体自某一固定高度下落的距离，则其加速度是 d^2y/dt^2，(1)就变为

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg$$

或

---

① 在大多数应用问题里，可认为它在地面等于常数，其值约为每秒每秒 32 英尺(或每秒每秒 980 厘米).

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g. \tag{2}$$

若改变条件,假定空气对落体施加正比于其速度的阻力$k\left(\frac{dy}{dt}\right)$,则作用于物体上的总力是$mg-k\left(\frac{dy}{dt}\right)$,(1)就变为

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-k\frac{dy}{dt}. \tag{3}$$

方程(2)和(3)便是微分方程,它们表达了所论物理过程的主要本质.

微分方程的另一些例子是:

$$\frac{dy}{dt}=-ky; \tag{4}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky; \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dx}+2xy=e^{-x^2}; \tag{6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0; \tag{7}$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+p(p+1)y=0; \tag{8}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-p^2)y=0. \tag{9}$$

在所有这些方程里,因变量都是y,而自变量是t或x. 字母k, m和p代表常数(或恒量). 常微分方程是只含一个自变量的方程,故其中所有导数都是普通导数. 这种方程都叫普通微分方程或常微分方程. 微分方程的阶是其所含最高阶导数的阶. 方程(4)和(6)是一阶的,其他各方程则是二阶的. 方程(8)和(9)是有名的古典方程,分别叫勒让特(Legendre)方程和贝塞耳(Bessel)方程. 这两个方程都有大量的文献,研究的历史有几百年之久. 以后我们也要详细研究这些方程.

偏微分方程是含有一个以上自变量的方程,故其中的导数是偏导数. 例如,若$w=f(x, y, z, t)$是时间以及空间一点的三个直角坐标的

函数，以下就是一些二阶偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0;$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial t};$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

这些也是有名的古典方程，分别叫拉普拉斯 (Laplace) 方程，热(传导)方程和波动方程．它们在理论物理学中都非常重要，对它们的研究曾引起许多重要的数学概念．一般说来，偏微分方程是在连续媒质物理学——在牵涉到电场、流体动力学、弥散及波动的问题中产生出来的．它们的理论同常微分方程的理论很不一样，而且几乎在每一方面都难得多．暂时我们只限于讨论常微分方程．

2. 关于解的一般性说明

一般的 n 阶常微分方程是

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0, \tag{1}$$

或者用撇号来表示导数，写成

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0.$$

要从理论上来充分讨论这个方程，就得明确假定函数 F 有哪些性质，加以详细的研究．但不恰当地强调理论上微妙之处常常易于使实际内容模糊不清．所以我们要设法避免过于纠缠在这些事情上——至少在目前．

要验证一个给定的函数 $y=y(x)$ 是像(1)那种方程的一个解，通常是件简单的事．这只要算出 $y(x)$ 的各阶导数，并证明把 $y(x)$ 和它的这些导数代入方程后就会使方程成为 x 的恒等式．照这个样子，便知

$$y=e^{2x} \text{ 和 } y=e^{3x}$$

都是二阶方程

$$y''-5y'+6y=0 \tag{2}$$

的解；而且，更一般地说，

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x} \tag{3}$$

（对于任取的常数 c_1 和 c_2）也是一个解．微分方程的解常是以隐式表示的函数形式出现的，因而有时就很难或不可能把因变量表示成自变量的显式．例如

$$xy=\log y+c \tag{4}$$

对于常数 c 的每一个值都是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-xy} \tag{5}$$

的一个解，这是只要把(4)微分并整理式子后便可验证的．这些例子又可说明这样一个事实：微分方程的一个解通常含有一个或更多的任意常数，它们的数目与微分方程的阶相等．

在大多数情形下，利用上述方法容易验证一个函数是否是给定微分方程的解．从微分方程出发求其一个解，那自然是难得多的问题．到一定时候我们将讲解求解(2)和(5)那样方程的成套方法．但目前只限于对解的某些总的性质讲几句话．

微分方程之中最简单的是

$$\frac{dy}{dx}=f(x), \tag{6}$$

求解的时候只要写出

$$y=\int f(x)dx+c. \tag{7}$$

在某些场合可以用微积分里的方法算出(7)中的不定积分．在另一些场合下，要求出这个积分的式子也许有困难或不可能．例如，已经知道

$$\int e^{-x^2}dx \text{ 和 } \int\frac{\sin x}{x}dx$$

是不能用有限个初等函数来表达的①. 但若我们记得

$$\int f(x)dx$$

只不过是表明以 $f(x)$ 为导数的那样一个(任何一个)函数的记号，那就只要把它写成

$$y=\int_{x_0}^{x} f(t)dt+c \tag{8}$$

的形式，就几乎总能给予(7)以一个真实的意义. 问题的本质在于：这个定积分是其积分上限 x 的一个函数（积分号下的 t 只不过是个临时变量)，而只要被积函数在积分范围内连续，则这个函数总存在，而且它的导数是 $f(x)$②.

一般的一阶方程是(1)在取 $n=1$ 时的特例:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0. \tag{9}$$

通常我们总可以指望这样的一个方程会有一个解，而且这解含有一个任意常数. 然而

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$$

却根本没有任何实值的解，而

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=0$$

则只有 $y=0$ 这个单独的解(它不含任意常数). 这类情况，使人对微分方程的解是否存在以及解的性质如何，在理论上产生了困难的问题. 此刻我们不能充分讨论这些问题，但若从直观上来叙述一些基本事实，可

---

① 哪个读者急于想知道这一道理，可去参看 D. G. Mead 在 *Am. Math. Monthly*(《美国数学月刊》)(vol. 68, pp. 152—156, 1961) 中的一篇文章《Integration》. 如要进一步详究，可参看 G. H. Hardy 著《The Integration of Functions of a Single Variable》(Cambridge University Press, London, 1916)，或 J. F. Ritt 著《Integration in Finite Terms》(Columbia University Press, New York, 1948.)

② 这句话是微积分学基本定理的表达形式之一.

能有助于澄清问题.

为简便起见，设可以从(9)解出$\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \tag{10}$$

又设$f(x,y)$是在xy平面的某个矩形域R上的连续函数. (10)的解的几何意义最好是这样来理解(图 1): 若$P_0=(x_0,y_0)$是R内一点，则数

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_0}=f(x_0,y_0)$$

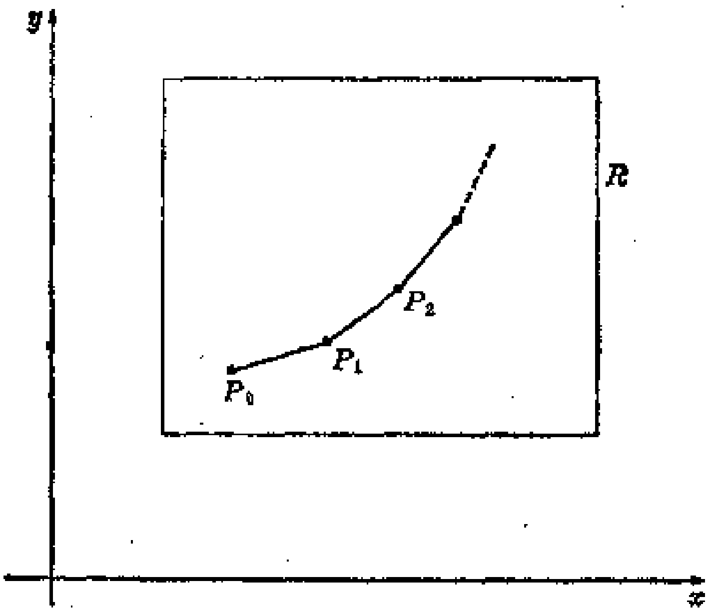


图 1.

决定P_0处的一个方向. 现在，令$P_1=(x_1,y_1)$是在这个方向上接近P_0的一点，并用数

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1}=f(x_1,y_1)$$

决定P_1处的一个新方向. 其次， 令$P_2=(x_2,y_2)$是在这新方向上接近P_1的一点，并用数

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_2}=f(x_2,y_2)$$

决定P_2处的另一个方向. 如果继续这样做，就得到一根折线. 上面像念

佛珠似地带着一些点；假如设想这些成串的点彼此移近，并且数目越来越多，那末折线就成为一根通过出发点 P_0 的光滑曲线．这曲线就是方程(10)的一个解 $y=y(x)$；因在其上每一点 (x, y) 处，斜率由 $f(x, y)$ 给出，而这正是微分方程所定的条件．如果从另一个初始点出发，那末一般就会得到一根不同的曲线(或解)．这样，(10)的解就形成一族曲线，叫积分曲线[①]．并且，我们似乎有理由猜想：过 R 内的每一点，正好有(10)的一根积分曲线通过．上面的讨论只是为了使读者对下述精确定理感到更加言之有理罢了．

定理 A(毕卡定理)　若 $f(x, y)$ 与 $\partial f/\partial y$ 都是闭矩形域 R 上的连续函数，则过 R 内部每一点 (x_0, y_0) 都有方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x, y)$ 的唯一的一根积分曲线通过．

如果考虑在这定理中的一个固定 x_0 值，则过 (x_0, y_0) 的积分曲线就由 y_0 的选取而完全确定．这样就可以看出 (10) 的积分曲线形成一个所谓单参量曲线族．这曲线族的方程可写成

$$y=y(x, c) \tag{11}$$

的形式，其中对参量 c 的数值作不同的选取，就会得出曲线族中不同的曲线．过 (x_0, y_0) 的那根积分曲线则相应于使 $y_0=y(x_0, c)$ 的那个 c 值．若把这个数记为 c_0，那末(11)就叫(10)的通解，而

$$y=y(x, c_0)$$

则叫满足初始条件

$$当\ x=x_0\ 时\ y=y_0$$

的特解．通解(11)的主要特点是：可以适当选取它所含的常数 c，使在所论矩形域内任一给定点，有一根积分曲线通过．

在第十一章里有毕卡定理的证明．这证明是很复杂的，也许最好是等读者对这门课中比较简捷的部分有了相当经验之后再讲．定理本身

① 微分方程的解有时叫该方程的积分，因为求微分方程解的问题或多或少是普通积分问题的一种推广．

也可以再削减它所要求的条件而从多种不同方向予以加强；也可以把它推广到可解出 n 阶导数的 n 阶微分方程上．这些结果的详细讨论在这里是不合适的，所以暂时只能满足于对主要思想作这种非正式的讨论．在本章其余部分中，我们将探讨科学应用中出现微分方程的一些方式．

习　题

1．验证下列各函数（显式的或隐式的）是相应微分方程的解：

a. $y=x^2+c$　　$y'=2x$；

b. $y=cx^2$　　$xy'=2y$；

c. $y^2=e^{2x}+c$　　$yy'=e^{2x}$；

d. $y=ce^{kx}$　　$y'=ky$；

e. $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$　　$y''+4y=0$；

f. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$　　$y''-4y=0$；

g. $y=c_1\sinh 2x+c_2\cosh 2x$　　$y''-4y=0$；

h. $y=\sin^{-1}xy$　　$xy'+y=y'\sqrt{1-x^2y^2}$；

i. $y=x\tan x$　　$xy'=y+x^2+y^2$；

j. $x^2=2y^2\log y$　　$y'=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$；

k. $y^2=x^2-cx$　　$2xyy'=x^2+y^2$；

l. $y=c^2+c/x$　　$y+xy'=x^4(y')^2$；

m. $y=ce^{y/x}$　　$y'=y^2/(xy-x^2)$；

n. $y+\sin y=x$　　$(y\cos y-\sin y+x)y'=y$；

o. $x+y=\tan^{-1}y$．　　$1+y^2+y^2y'=0$

2．求下列各微分方程的通解：

a. $y'=e^{3x}-x$；　　c. $y'=xe^{x^2}$；

b. $xy'=1$；　　d. $y'=\sin^{-1}x$

3．对下列各微分方程，求其满足所给初始条件的特解：

a. $y'=xe^x$，当 $x=1$ 时 $y=3$；

b. $y'=2\sin x\cos x$，当 $x=0$ 时 $y=1$；

c. $y'=\log x$，当 $x=e$ 时 $y=0$．

3. 曲线族.正交轨线

我们知道，一阶微分方程的通解一般含有一个任意常数——叫参量．当给定这个参量以不同的值时，就得到一个单参量曲线族．这族曲线中的每一根曲线是所给微分方程的一个特解或一根积分曲线，而其全体则组成微分方程的通解.

相反，可以料想，任一单参量曲线族中的曲线也是某个一阶微分方程的积分曲线．如果这曲线族是

$$f(x, y, c)=0, \tag{1}$$

那末它的微分方程可按下列步骤来求．先把(1)对 x 微分，得到

$$g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c\right)=0 \tag{2}$$

这种形状的关系式．其次，从(1)与(2)中消去参量 c，得到

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{3}$$

这便是所需微分方程．例如，

$$x^2+y^2=c^2 \tag{4}$$

是以原点为公共圆心的一族圆的方程(图 2)．对 x 微分后，变成

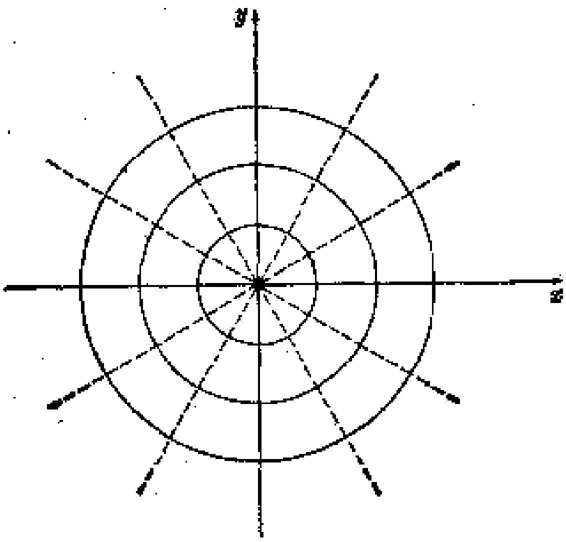


图 2

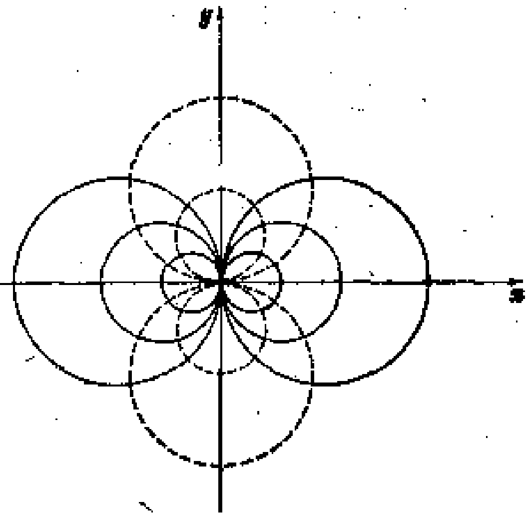


图 3

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0;$$

由于这里已经没有 c,那就无需再消去,所以

$$x+y\frac{dy}{dx}=0 \tag{5}$$

就是所给圆族的微分方程. 同样,

$$x^2+y^2=2cx \tag{6}$$

是与 y 轴相切于原点处的所有圆的方程(图 3). 把它对 x 微分, 得到

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=2c$$

或

$$x+y\frac{dy}{dx}=c. \tag{7}$$

这里仍有参量 c, 所以必须结合(6)与(7)两式把 c 消去. 这就得出曲线族(6)的微分方程为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}. \tag{8}$$

作为这种步骤的一种有意义的应用, 我们来考虑求正交轨线的问题. 为说明这究竟是什么样的一个问题, 我们指出, (4)所表示的圆族和通过原点的直线族 $y=mx$(图 2 中虚线所示)具有如下性质: 任一族中的每一曲线都跟另一族中的每一曲线正交(即相垂直). 每当两族曲线之间有这种关系时, 就说每族曲线是另一族曲线的**正交轨线族**. 正交轨线在平面曲线几何学中以及在应用数学的某些部门是有意义的. 例如,若在一片平面导体材料中有电流通过,则等势线便是电流流线的正交轨线.

就以原点为公共圆心的圆族这个例子来说,从几何上显然可知: 它的正交轨线是通过原点的直线,反之也是. 但若要处理更复杂的情况,就需要有求正交轨线的一种解析方法. 设

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{9}$$

是图 4 中实线所示曲线族的微分方程．这些曲线是由这一事实来刻划的：在其任一曲线的任一点(x, y)处，其斜率是由$f(x, y)$给出的．通过同一点的、用虚线描出的正交轨线，由于它同第一根曲线正交，所以它在该处的斜率是第一根曲线斜率的负倒数．故沿任一正交轨线有$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{f(x, y)}$，即

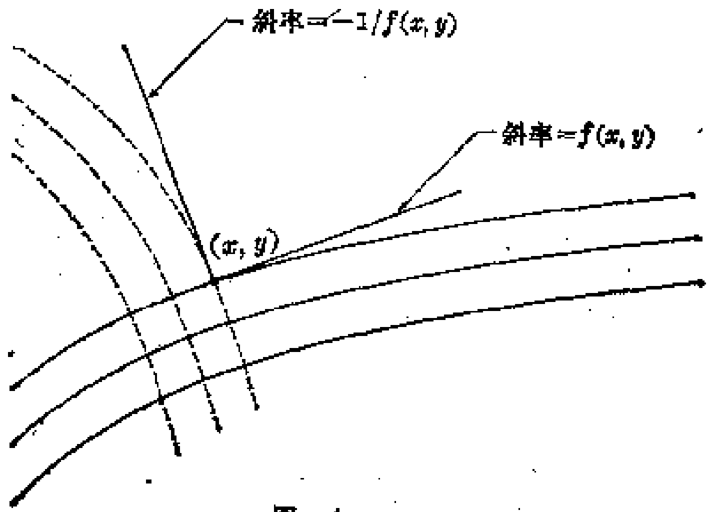


图 4

$$-\frac{dx}{dy}=f(x, y). \tag{10}$$

所以，求一给定曲线族的正交轨线的方法是：第一，求所给曲线族的微分方程；第二，把其中的dy/dx换成$-dx/dy$得出正交轨线的微分方程；最后，解出这新的微分方程．

若把这方法应用于圆族(4)，便得

$$x+y\left(-\frac{dx}{dy}\right)=0.$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}, \tag{11}$$

作为正交轨线的微分方程．现可把(11)中的变量分离，得到

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}.$$

直接积分，便有

$$\log y=\log x+\log c$$

即

$$y=cx,$$

这就是正交轨线的方程.

有时用极坐标来表示所给曲线族较方便. 在这种情况下，我们利用这一事实：若 ψ 是从矢径转到切线的角，则 $\tan\psi=rd\theta/dr$（图 5）. 根据上述，只要把所给曲线族微分方程中的 $rd\theta/dr$ 这个式子换成它的负倒数 $-\frac{dr}{rd\theta}$，便得到正交轨线的微分方程. 为说明这一方法的价值，我们来求圆族(6)的正交轨线. 要是用直角坐标，则由(8)得其正交轨线的微分方程为

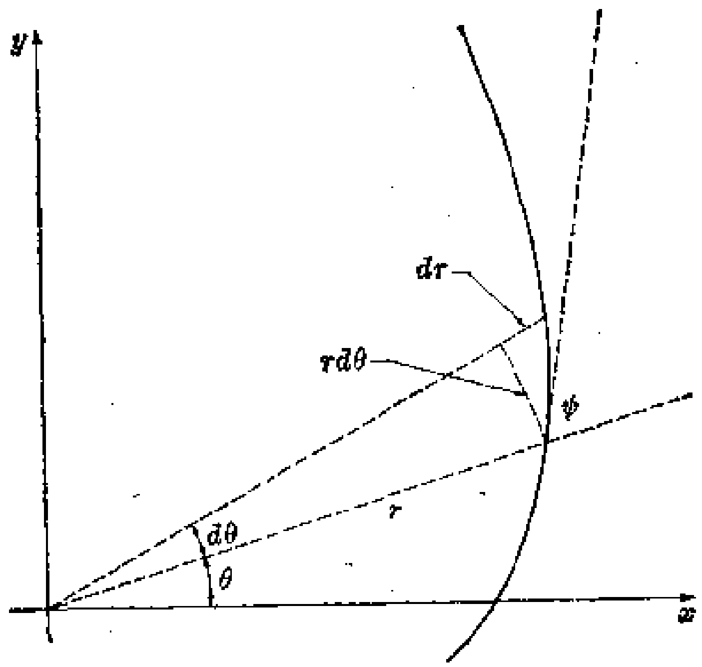


图 5

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}. \tag{12}$$

遗憾的是(12)中的变量不能分离，所以如果不懂得解微分方程的更多的技巧，我们就不能朝此前进. 但若用极坐标，这个圆族的方程可写成

$$r=2c\cos\theta. \tag{13}$$

由此得到

$$\frac{dr}{d\theta}=-2c\sin\theta. \tag{14}$$

从(13)和(14)消去 c 后，得所给圆族的微分方程为

$$\frac{rd\theta}{dr}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

因此，

$$\frac{rd\theta}{dr}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

便是正交轨线的微分方程. 这个方程中的变量可以分离，得出

$$\frac{dr}{r}=\frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta};$$

积分后，这就变为

$$\log r=\log(\sin\theta)+\log 2c,$$

故

$$r=2c\sin\theta \tag{15}$$

是正交轨线的方程. 我们指出，(15)是与 x 轴相切于原点处的那族圆(图 3 中虚线所示)的方程.

在第二章里我们要讲些解一阶方程的更复杂的方法. 由于目前注意的是更着重于应用而不是形式运算技巧，所以本章中的所有习题都是能用上述分离变量法解出的.

习　题

1. 画出下列各曲线族，求出正交轨线，并再描其图形：

   a. $xy=c$;　　　　c. $r=c(1+\cos\theta)$;

   b. $y=cx^2$;　　　　d. $y=ce^x$.

2. 画出以 x 轴为轴且以原点为焦点的抛物线族 $y^2=4c(x+c)$，并求这个抛物线族的微分方程. 证明当其中的 $\frac{dy}{dx}$ 换成 $-dx/dy$ 时这微分方程不变. 从这一事实你能作出什么结论？

3. 求满足下述几何条件的曲线：

a. 切点平分两轴间所夹的那段切线;

b. (x, y)与 x 轴间所夹那段法线,在 x 轴上的射影之长为 1;

c. (x, y)与 x 轴间所夹那段切线,在 x 轴上的射影长度为 1;

d. 极角 θ 等于矢径与切线的夹角 ψ;

e. 矢径与切线夹角 ψ 是常数.

4. 一曲线从原点伸向 xy 平面的第一象限. 曲线从点$(0, 0)$到(x, y)下方的面积是以此二点作为对角顶点的矩形面积的三分之一. 求曲线方程.

4. 增长、消减和化学反应

如果一个分子自动分解为较小分子的速率, 不受是否有其他物质存在的影响,那就自然会料想: 单位时间内将要分解的这类分子,它的数目正比于存在分子的总数. 这类化学反应叫做**一阶反应**.

例如, 设起初有 x_0 克物质按一阶反应分解. 若在其后 t 时存在的物质是 x 克,则上述原理给出以下的微分方程:

$$-\frac{dx}{dt}=kx,\ k>0. \tag{1}$$

[因$\frac{dx}{dt}$是 x 的增长率, $-\frac{dx}{dt}$是它的消减率,于是(1)说明 x 的消减率正比于 x.]若把(1)中的变量分离,便得到

$$\frac{dx}{x}=-kdt,$$

积分后,变成

$$\log x=-kt+c.$$

初始条件

$$当\ t=0\ 时\ x=x_0 \tag{2}$$

给出 $c=\log x_0$, 故 $\log x=-kt+\log x_0$, $\log\left(\frac{x}{x_0}\right)=-kt$, $\frac{x}{x_0}=e^{-kt}$,

于是

$$x=x_0e^{-kt}. \tag{3}$$

所以这个函数是微分方程(1)的满足初始条件(2)的解. 它的图形如图

6 所示. 正的常数 k 叫做反应率常数，因为它的数值显然是对于反应进行的速率的一种度量.

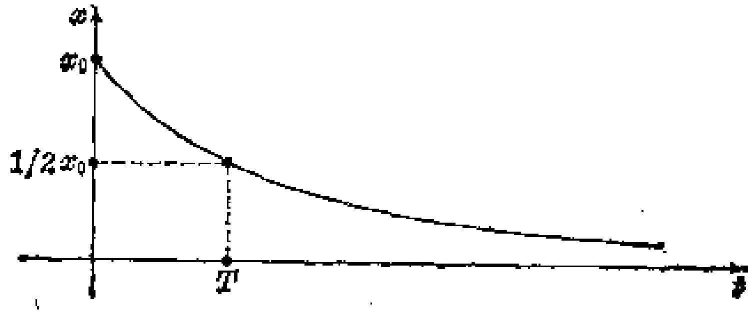


图 6

已知的一阶化学反应为数极少，其中最重要的是放射性衰变. 放射性元素的衰变率以用半衰期表示为宜. 这是一定量元素减到一半所需的时间. 若在公式(3)中把 x 换成 $x_0/2$, 便得半衰期 T 的方程

$$\frac{x_0}{2}=x_0e^{-kT},$$

于是

$$kT=\log 2$$

如果从观察或实验获悉 k 或 T, 就可用这方程求出另一个值.

这些思想是新近发展的一种科学工具的依据，它对地质学与考古学有重大意义. 主要的一点是，自然界中的放射性元素(其半衰期为已知的)可用来确定几千年或几十亿年前出现事件的时期. 例如，普通的铀同位素通过几个阶段衰变为氦和铅的一种同位素，其半衰期为45亿年. 当含铀的岩石处于熔化状态时，例如从火山口喷出的岩浆，这衰变过程所产生的铅就在岩浆流动过程中分散在整个岩浆中；但在岩石固结后，铅就固定在岩石里，并在它的母体铀附近逐渐积累增多. 通过对一块花岗岩的分析，可以确定铅与铀的含量之比，而这个比值就使我们能确定自花岗岩凝结那个关键时刻起所经过的时间. 目前使用的确定时期的几种方法，是根据钍和铀的同位素衰变为铅的各种同位素而来的. 另一种方法是根据钾衰变为氩的过程的，其半衰期是 13 亿年；还有一种方法用以确定最古老岩石的生成时期比较好，是根据铷衰变为

铌的过程的，它的半衰期有500亿年之久．这些研究是复杂的，并且容易产生许多种错误；但各种方法可以彼此检核，便能对地质史上与火成岩形成有关的许多事件确定可靠的时期．几千万年的岩石算是很年青的，几亿年之久的岩石是很普通的，现在发现的最古老岩石在30亿年以上．这当然是地壳(从而也是地球本身)年令的下限．其他方面的研究，利用各种类型的天文数据，对陨石中所含矿物年龄的测定等等，提供地球的年龄可能约为45亿年①．

上述各种放射性元素的衰变过程太慢，因此根据这些过程确定时期的方法，不宜于用来确定较近时期发生的事件．这种缺陷由40年代W. 李倍(Willard Libby)发现的放射性碳作了补充，这是碳的一种放射性同位素，其半衰期约为5600年．到1950年，李倍和他的助手已搞出一套利用放射性碳确定时期的方法，这就好比给上述那种走得缓慢的地质钟上加装了秒针，使我们有可能测定冰河时期最末几个阶段所发生事件以及史前人类一些行动和活动的时期．这种方法对晚近第四纪地质学以及考古学研究上的贡献是很可观的．

概要说来，这种方法所根据的事实和原理是这样的：宇宙线里的中子对氮作用的结果，在高层大气中产生放射性碳．这放射性碳经氧化后成为二氧化碳，它被气流同大气中原有的无放射性二氧化碳混在一起．由于放射性碳是在不断形成和不断重新衰变成氮的过程中，故它在大气中与普通碳的比早已到达一种平衡状态．所有呼吸空气的植物都把这一定比例的放射性碳吸收入组织内，而吃这些植物的动物体内也一样．当植物与动物还活着时，这个比例保持不变；但当它死亡时，它就不再吸入新的放射性碳，而体内原有的放射性碳则继续进行衰变过程．因此，如果一块木头的放射性只有活树的一半，那末它大约是从5600年以前活树上砍下的，如果放射性只有四分之一，它的生活期就约在11,200年以前．这一原理提供了测定有机性古物(如木头，木

① 对这些事情以及地质年代学上其他许多方法与结果的充分讨论，可参看F. E. Zeuner著《Dating the Past》，1958年第4版．

炭，植物纤维，肉，皮，骨，角)年龄的一种方法. 美洲巨松的年轮表明其心木年龄有 3000 至 4000 年之久，用这种放射性碳的方法测心木年龄，证明它的结果可靠. 此外埃及古墓中傢具的年代也是从其他资料独立断定的，用新方法测定这些傢具的结果也证明这种方法可靠. 在具体测定时有技术上的困难，但一般觉得只要所涉及的时代不太久(最久为 50000 年)，这种方法能测得相当准确.

放射性碳测定年代法已用之于几千件古物，搞这类工作的实验室也有几十个之多. 在较有意义的几项测定年代工作中有如下几项：最近在巴勒斯坦洞穴中发现的以赛亚书死海书卷的亚麻布包皮，一般认为是公元前一世纪或二世纪的遗物，测定的结果是 1917±200 年前；法国南部有著名史前壁画的 Lascaux 洞穴中的木炭，有 15,516±900 年之久；英国南部石垣(Stonehenge)史前遗迹处的木炭，3798±275 年；俄勒岗州形成火山口湖时被火山烧焦的木炭，6453±250 年. 整个西半球古人的营宿地都曾用木炭块、草鞋纤维、野牛碎焦骨等等测定了它们的年代. 这些结果说明人类是直到 11,500 年前冰河时期末期才去新世界的，那时海洋水面比现今低得多，所以古人能从西伯利亚步行通过白令海峡到达阿拉斯加[①].

这些思想看来好似同微分方程这门课相去颇远，但实际它们是根据方程(1)及由公式(3)所提供的解这个数学基础而来的. 在以下的习题中，我们请读者用同样的方法去解化学、生物学和物理学上的问题.

习 题

1. 设溶液中两种化学物质互起反应形成一种化合物. 若反应是由物质分子间的碰撞和相互作用所致，则可料想化合物的形成率正比于单位时间内的碰撞次

① 李倍(Libby)由于上述工作获 1960 年诺贝尔化学奖金. 他自己对这个方法的叙述及其缺陷与结论载于其所著《放射性碳测定年代》(Radiocarbon Dating)，1955 年芝加哥大学出版社，第 2 版. 此外并参阅 G. C. Baldwin 著《America's Buried Past》，Putnam, New York, 1962.

数，而这个次数又与两种未化合物质的数量之积成正比．按照这一方式进行的化学反应叫做二阶反应，而这种反应规律常被人称为质量作用定律．现在考察一种二阶反应，其中 x 克化合物含第一种物质 ax 克，含第二种物质 bx 克，而 $a+b=1$．若反应开始时有第一种物质 aA 克，有第二种物质 bB 克，且 $t=0$ 时 $x=0$，求 x 是 t 的什么函数？

2. 设 $t=0$ 时在培养液中放进 x_0 个细菌，而其后 t 时的菌数是 x．若食料与生存空间无限，因而任一时刻菌数的增长率正比于那一时刻的菌数，求 x 是 t 的什么函数？

3. 若题 2 中的生存空间有限而食料是以恒定速率投入的，那末对食料及生存空间的竞争将产生这样一种作用，使菌数终于稳定在一个固定的水平 x_1 处．在这些条件下，设菌数增长率与 x 和差 x_1-x 之积成正比，求 x 是 t 的什么函数？

4. 设海平面上高度 h 处的空气压强正比于该高度处单位水平面积之上空气柱的质量，又设在所有高度处，一定质量空气的体积与其上的压强二者之积保持一定．若在海平面处的 $p=p_0$，求 p 是 h 的什么函数．

5. 设热体冷却的速率正比于它与周围的温度差（牛顿冷却律[①]）．一物体加热到 110°C 后置于温度为 10°C 的空气中．经过 1 小时后它的温度是 60°C．若要把它冷却到 30°C 还需再经过多少时间？

6. 根据兰伯特吸收定律，薄层半透明材料吸收入射光的百分率正比于该层材料的厚度[②]．若垂直照射在海水上的日光在 10 英尺深处的强度为原强度的一半，问在多深处其强度减到原强度的十六分之一？请你先只凭头脑估算解这问题，然后又列出并求解一个合适的微分方程来处理这问题．

5. 落体和其他速率问题

这一节里讲质点在给定力作用下沿给定路线的运动情况如何这个动力学问题．我们只考察两种简单的情形：(1)铅直路线的情形，这时质点只受引力影响自由下落或者同时考虑到空气阻力的影响；(2)圆弧

---

① 牛顿自己曾用这法则来估算一个赤热铁球的温度．当时对热传导的情况所知极少，所以他的结果只是粗略的近似，但这肯定比没有强．

② 兰伯特(Johann Heinrich Lambert, 1728—1777)是瑞士-德国籍的天文学家、数学家、物理学家和学者．他主要是自学的，发表过关于彗星运动轨道、光学、测绘地图等方面的文章．兰伯特等面积投射法是所有地图绘制者都知道的．在数学家中都记得他是第一个证明 π 是无理数的人．

路线的情形，典型例子是摆锤的运动.

自由下落 自由落体问题在第1节中讨论过并得出这种运动的微分方程是

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g, \tag{1}$$

其中 y 是物体从某一固定高度算起的下落距离. 积分一次得出速度,

$$v=\frac{dy}{dt}=gt+c_1. \tag{2}$$

因常量 c_1 显然就是 $t=0$ 时的 v 值，所以它就是初速度 v_0，于是(2)变成

$$v=\frac{dy}{dt}=gt+v_0. \tag{3}$$

再积分一次，得到

$$y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+c_2.$$

这常量 c_2 是 $t=0$ 时的 y 值，即初始位置 y_0，故最后得(1)的通解是

$$y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0. \tag{4}$$

若物体在 $y=0$ 处从静止下落，从而 $v_0=y_0=0$，于是(3)和(4)就化成

$$v=gt \text{ 和 } y=\frac{1}{2}gt^2.$$

消去 t 后，就得到用所下落距离表示的速度的有用式子

$$v=\sqrt{2gy}. \tag{5}$$

这个结果也可以从能量守恒原理得出，这个原理可以叙述为

动能＋势能＝常量.

由于物体在 $y=0$ 处从静止下落，它所获得的动能等于所损失的势能，这一事实可表为

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy,$$

由此立即可得(5).

阻尼下落 若设空气对落体有一种正比于其速度的阻力，则落体运动

的微分方程是

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g-c\frac{dy}{dt}, \tag{6}$$

其中 $c=k/m$[见方程 1-(3)]. 若把 dy/dt 换成 v, 这就是

$$\frac{dv}{dt}=g-cv. \tag{7}$$

分离变量并积分, 得到

$$\frac{dv}{g-cv}=dt.$$

于是

$$-\frac{1}{c}\log(g-cv)=t+c_1,$$

故

$$g-cv=c_2e^{-ct}.$$

当 $t=0$ 时 $v=0$ 这一初始条件确定了 $c_2=g$, 故

$$v=\frac{g}{c}(1-e^{-ct}). \tag{8}$$

因 c 是正的, 故 $t\to\infty$ 时 $v\to g/c$. v 的这个极限值叫做终极速度. 如有必要, 这可把(8)中的 v 换成$\frac{dy}{dt}$并再积分一次, 求出 y 是 t 的函数.

摆的运动 设一摆由长度为 a 质量可忽略的细杆及杆端质量为 m 的一锤组成. 若把锤向一边拉开一个角α, 然后放手 (图 7), 则据能量守恒原理有

$$\frac{1}{2}mv^2=mg(a\cos\theta-a\cos\alpha). \tag{9}$$

由于 $s=a\theta$ 故 $v=ds/dt=a\ (d\theta/dt)$, 上式变为

$$\frac{1}{2}a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=ga(\cos\theta-\cos\alpha); \tag{10}$$

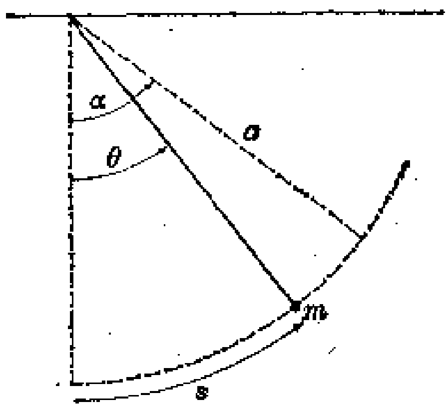


图 7

解出 dt, 并注意 θ 随 t 的增加（对小的 t 值而言）而减小这一事实，得到

$$dt=-\sqrt{a/2g}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}.$$

若 T 是周期(即完成整个一次振荡所需的时间)，则

$$\frac{T}{4}=-\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_{\alpha}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}$$

即

$$T=4\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_{0}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}} \tag{11}$$

这公式中的 T 值依赖于 α, 这就是为什么钟摆计时的快慢要随着摆锤摆动角度的大小而变更的缘故. 这个周期公式还可以表达成更好的形式如下：由于

$$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

故有

$$T=2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{0}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2)-\sin^2(\theta/2)}}$$

$$=2\sqrt{\frac{g}{a}}\int_{0}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{k^2-\sin^2(\theta/2)}},\quad k=\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{12}$$

现设 $\sin(\theta/2)=k\sin\phi$ 把变量从 θ 变到 ϕ, 于是当 θ 从 0 变到 α 时，ϕ 从 0 变到 $\pi/2$, 且

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=k\cos\phi d\phi$$

或

$$d\theta=\frac{2k\cos\phi d\phi}{\cos(\theta/2)}=\frac{2\sqrt{k^2-\sin^2(\theta/2)}d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

这就使我们能把(12)写成

$$T=4\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=4\sqrt{\frac{a}{g}}F\left(k,\frac{\pi}{2}\right), \tag{13}$$

其中

$$F(k,\ \phi)=\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

是 k 和 ϕ 的一个函数，它叫第一类椭圆积分[1]. 第二类椭圆积分是

$$E(k,\ \phi)=\int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi,$$

它出现在求椭圆周长的问题中（见习题 5）. 这些椭圆积分不能用初等函数来算. 由于它们在工程应用中常常出现，数学用表中通常列出它们依赖于 k 和 ϕ 的函数值.

迄今我们讨论摆的问题时注重于一阶方程(10). 有时讨论二阶方程更方便，把(10)对 t 微分，得到

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\sin\theta. \tag{14}$$

如果我们记得当 θ 值小时 $\sin\theta$ 近似等于 θ，(14)就可变为（近似地）

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{a}\theta=0 \tag{15}$$

以后可以知道，重要的二阶方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$$

的通解是

$$y=c_1\sin kx+c_2\cos kx,$$

故(15)给出的解是

$$\theta=c_1\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t+c_2\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t. \tag{16}$$

当 $t=0$ 时，$\theta=\alpha$ 以及 $d\theta/dt=0$，这条件说明 $c_1=0$，$c_2=\alpha$，故(16)简化为

---

[1] 在写椭圆积分时通常违反惯例而允许用同一字母表示积分上限与积分号下的临时变量.

$$\theta=\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t. \tag{17}$$

(14)的这个近似解的周期是 $2\pi\sqrt{a/g}$. 值得指出的是这正好就是当 $k=0$时从(13)得出的T值, 这在摆的振动角度很小时是近似成立的.

习 题

1. 若对质量为m的落体, 空气阻力正比于速度的平方, 方程(7)就变为

$$\frac{dv}{dt}=g-cv^2, \qquad c=k/m.$$

设当 $t=0$ 时 $v=0$. 求 v 是 t 的什么函数? 在这情况下的终极速度是多少?

2. 鱼雷在燃料烧尽时的速度是 60 英里/小时. 若水对其运动的阻力正比于速度, 且若它在水中行驶 1 英里后速度就减到 30 英里/小时, 问它能在水中行驶多远?

3. 质量为m的物体在地面上所受引力是 mg. 牛顿引力律说这个力与物体到地心距离的平方成反比. 试证: 若从地面往上抛的投射体能够永远前进, 它的初速度至少是$\sqrt{2gR}$, 其中R是地球半径(约 4000 英里). 这个逸出速度约等于每秒 7 英里或每小时 25,000 英里. 提示: 若x是地心到投射体的距离, $v=\frac{dx}{dt}$是它的速度, 则

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}.$$

4. 在地球内部, 重力正比于到地球中心的距离. 若从南极穿一洞通北极, 把一块石头投入洞内, 问它到达地心时的速度是多少?

5. 试证椭圆 $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta\,(a<b)$ 的周长是 $4bE(e, \pi/2)$, 其中 e 是偏心率.

6. 试证 $y=\sin x$ 的一拱之长为 $2\sqrt{2}\,E(\sqrt{2}/2, \pi/2)$.

7. 试证双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 的总长是 $4aF(\sqrt{2}, \pi/4)$.

6. 速降线. 费马与伯努利家族

设想有一根直的金属线把图 8 中的A点与较低处的B点连接, 并有一个串珠可以不受阻力沿着线从A滑到B. 我们也可以设想从A到B的线是弯成圆弧的情形, 这时串珠下落的运动就和摆体运动的情形

一样．问串珠沿直线下落快还是沿圆弧下落快？伽利略相信沿圆弧下落较快，也许大多数人都会同意他的看法．若干年之后，在 1696 年，J. 伯努利提出了一个更一般的问题．他设想线能变成任意曲线的形状，问在无穷多种可能的曲线中，沿哪一条曲线下落所需时间最少．这

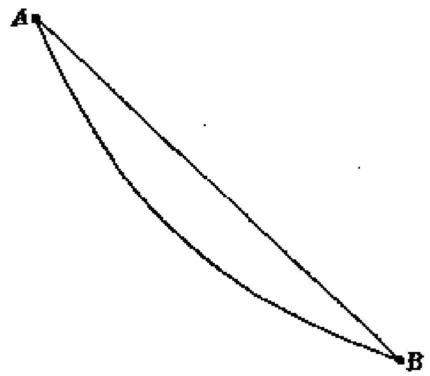


图　8

曲线叫速降线(brachistochrone，其中希腊字 brachistos 意即最短，chronos 指时间)．本节目的是使读者懂得伯努利对这个有趣问题的奇妙解法．

先从一个似乎不相干的光学问题开始．如图 9a 所示，一道光线以速度 v_1 从 A 到达 P，进入较密媒质后以较低速度 v_2 从 P 到达 B．按图中记号，经过整个路程所需时间 T 是

$$T=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}.$$

若设这光线能选取从 A 到 B 的路线使 T 为极小，则 $\frac{dT}{dx}=0$，用初等微积分方法，得到

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

或

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}.$$

这就是史奈尔折射定律，原来是通过实验发现的，形式是 $\sin\alpha_1/\sin\alpha_2=$常数，意义没有现在这样清楚①．光沿所需时间最少的路程从

① 史奈尔(Willebrord Snell，1591—1626)是荷兰天文学家兼数学家．他在 22 岁时继他父亲之后任莱顿(Leiden)的数学教授．他的声誉主要来自 1621 年发现的折射律，这对微积分学和光的波动学说的发展起相当重要的作用．

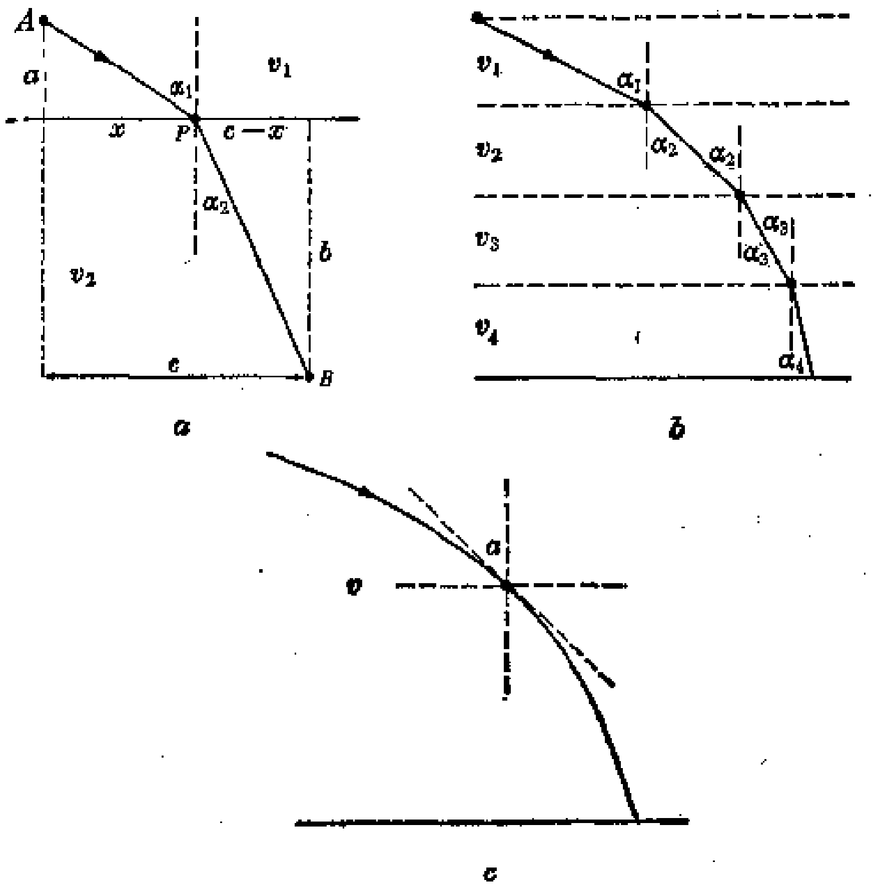


图 9

一点行进到另一点. 这一假设叫费马最小时间原理. 这个原理不仅给史奈尔定律提供了合理的根据, 并可用来求出光在可变密度媒质中运行的路径, 在那种媒质里, 光一般是沿曲线而不是沿直线行进的. 图9*b*所示是多层的透光媒质. 在每一层里光速不变, 但从每一层到其下一层, 光速降低. 当光一层层往下行进, 它就愈来愈折向垂线, 于是若在两层交界处应用史奈尔定律, 便得

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}=\frac{\sin\alpha_3}{v_3}=\frac{\sin\alpha_4}{v_4}.$$

其次若让各层变得越来越薄而层数越来越多, 于是在极限情形, 光线往下进行, 其速度就连续地降低, 可得结论

$$\frac{\sin\alpha}{v}=\text{常数}.$$

这情况如图 9*c* 所示, 可近似地看作是太阳光通过密度连续增加的大气

层其速度逐渐变慢而照到地面的情景.

现在再来看伯努利问题，我们引用如图 10 所示的坐标系，并设想串珠(也像光线那样)能选择它从 A 滑行到 B 的路径，使所需时间尽可能短. 从上述论点，得出

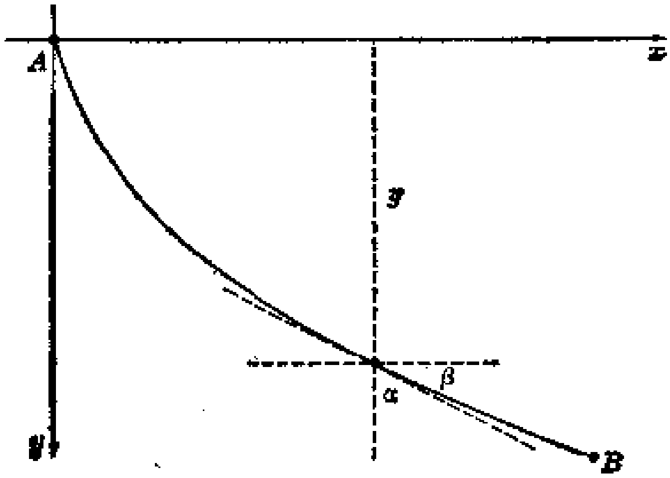


图 10

$$\frac{\sin\alpha}{v}=\text{常数} \tag{1}$$

根据能量守恒原理，串珠在一定高度处的速度，完全由其到达该高度处所损失的势能确定，而与所经路线根本无关. 与上节一样，这就给出

$$v=\sqrt{2gy}. \tag{2}$$

从这里的几何关系，我们还有：

$$\sin\alpha=\cos\beta=\frac{1}{\sec\beta}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}. \tag{3}$$

把(1)，(2)，(3)这些方程(分别得自光学、力学和微积分)结合起来，得到

$$y[1+(y')^2]=c \tag{4}$$

这就是速降线的微分方程.

现在只要解出(4)，就可以结束我们的讨论，并发现速降线究竟是什么样的曲线. 把 y' 写成 dy/dx 并分离变量，(4)就变为

$$dx=\left(\frac{y}{c-y}\right)^{\frac{1}{2}}dy.$$

到这里我们引入新变量 ϕ,令

$$\left(\frac{y}{c-y}\right)^{\frac{1}{2}}=\tan\phi. \tag{5}$$

从而 $y=c\sin^2\phi$, $dy=2c\sin\phi\cos\phi d\phi$, 故

$$\begin{aligned}dx&=\tan\phi dy\\&=2c\sin^2\phi d\phi=c(1-\cos2\phi)d\phi.\end{aligned}$$

积分后得到

$$x=\frac{c}{2}(2\phi-\sin2\phi)+c_1$$

这曲线过原点,故由(5)得: $\phi=0$ 时, $x=y=0$, 于是 $c_1=0$. 这样

$$x=\frac{c}{2}(2\phi-\sin2\phi) \tag{6}$$

而

$$y=c\sin^2\phi=\frac{c}{2}(1-\cos2\phi). \tag{7}$$

若令 $a=c/2$, $\theta=2\phi$, 则(6)与(7)就变为

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta). \tag{8}$$

这是图 11 所示圆滚线(或摆线)的标准参数方程,这种曲线是由半径 a 的圆周上一点当圆沿 x 轴滚动时产生的. 我们指出,使图 10 中摆线第一拱通过 B 点的 a 值只有一个;因若让 a 从 0 增到∞,这一拱弧就逐渐膨大,扫过整个第一象限,因而若适当选取 a,就能使它通过B.

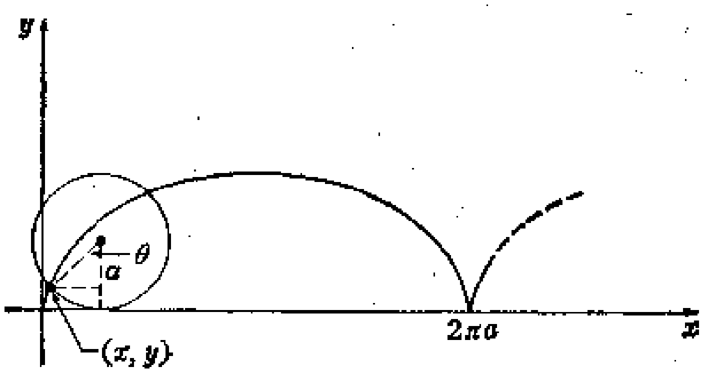


图 11

读者也许从初等微积分已经熟悉摆线的一些几何性质. 例如,摆线的一拱弧之长等于生成圆直径的4倍,而一拱弧之下的面积是该圆面积的3倍. 这一值得注意的曲线具有许多其他有趣的几何性质与物理性质,其中有些将在下列习题中予以说明.

我们希望这些细节不致掩盖伯努利解这问题时的惊人的想象能力,因为这是一项水平极高的艺术工作. 速降线问题除了有其内在价值之外还具有更大的意义:它是产生变分法的历史根源,而变分法是近代分析上的一个极有用的分支,它深刻揭示出物理世界核心里隐藏的简单性. 我们将在第9章中讨论这门学科,并讲述推导方程(4)的一个一般方法,它适用于各种各样的一大批类似的问题.

关于费马的注记　费马(Pierre de Fermat, 1601—1665)是十七世纪的最大数学家,但他的影响因其不愿发表所获发现(这些主要是通过他给朋友的信件和所读书中空白处的注记而为后人得知的)而受到限制. 他的本职是法官和法王在土鲁斯(Toulouse)城议会里的顾问. 但他的私人爱好和业余消遣是数学. 他在1629年发明了解析几何,但这个功劳大都归功到笛卡儿身上,后者在1637年把他类似费马的思想匆匆付印问世了. 这时——牛顿出世前13年——费马还发现了画曲线切线的一种方法和极大、极小的求法,这几乎相当于微分学初步. 在直到1934年才为世人所知的一封信中,牛顿承认他自己早期在这方面的一些思想直接来自费马. 在1654年写的一批信件中,费马与巴斯喀(Pascal)共同发展了概率论的基本概念. 他在1657年发现的最小时间原理及其与光的折射现象的关系,是走向光学统一理论的最早一步. 不过费马的天才在数论方面显得最为杰出,因为他对正整数那些熟知而又神秘性质的深刻认识恐怕是无人能与之比拟的. 下面提出他在这个领域里许多发现中的少数几个.

1. 费马二平方和定理. 形式为 $4n+1$ 的每个质数可用唯一方式写成二平方数之和.
2. 费马定理:若 p 是任一质数,n 是任一正整数,则 p 能整除 n^p-n.
3. 费马末定理:若 $n>2$,则 $x^n+y^n=z^n$ 不能为任何正整数 x, y, z 所满足.

最后这个定理是费马写在他的一本书边空白处的,那里书上正提到 $x^2+y^2=z^2$ 有许多整数解这一事实. 然后他又添上了这句逗人深思的话:“我得出了一个确实很妙的证明,但这里空白太少写不下.”遗憾的是再也没有别人发现过这个证明,因此

直到今日，费马末定理仍是数学上尚未解决的最难问题之一．谁要是能得出证明，就马上能名垂不朽，但对雄心勃勃的学生应该告诫一句：几百年来有才能的数学家都为此徒劳无功．

关于伯努利家族的注记 许多人都知道巴哈(Johann Sebastian Bach)是古今最伟大的作曲家之一．但这个多才多艺的家族在这方面是如此一贯地具有天赋，竟在十六世纪到十九世纪中出了几十位姓巴哈的杰出音乐家，知道这件事的人也许就不那么多了．事实上，德国有许多地方甚至把巴哈这个词理解为音乐家．伯努利家族在数学与科学上的地位也正如巴哈家族在音乐上的地位一样．这个非凡的瑞士家族在三代时间里生出了八个数学家(其中三个是杰出的)，他们又生出了在许多领域里崭露头角的成群后代．

雅可布·伯努利(Jakob Bernoulli, 1654—1705)的父亲执意要他学神学，但他一有机会便尽早放弃神学而从事他所喜爱的科学．他自学了牛顿和莱布尼兹的微积分，并从1687年起至他去世任巴塞耳(Basel)大学数学教授．他发表过无穷级数的论文，研究过许多特殊曲线，发明极坐标，引入那出现在函数 $\tan x$ 的幂级数展式中的伯努利数．在他的《推测术》(Ars Conjectandi)一书中，他叙述了概率论中称之为伯努利定理或大数定律的基本原理：若某事件的概率是 p，且若 n 次独立试验中有 k 次出现该事件，则当 $n\to\infty$ 时 $k/n\to p$．乍一看，这定理似乎平凡不足道，但其中深埋着哲学上(以及数学上)乱麻密林似的一大堆问题，从伯努利时代起迄今仍是许多争论的根源．

雅可布的弟弟约翰·伯努利(Johann Bernoulli, 1667—1748)原来也错选了职业，他起先学医，并在1694年获巴塞耳大学博士学位，论文是关于肌肉收缩问题的．但他也爱上了微积分，很快就掌握了它，并用它来解决几何学、微分方程和力学上的许多问题．1695年他任荷兰格罗宁根(Groningen)大学数学物理学教授，而在他哥哥雅可布死后继任巴塞耳大学教授．两兄弟有时致力研究同一问题，但由于彼此妒嫉和易于激动，这一情况是很遗憾的．有时两人之间的磨擦爆发成为公开的嫉恨诟骂，例如关于速降线问题就出现这种情况．1696年约翰向全欧洲提出这个问题挑战．它引起了极大的兴趣，并为牛顿、莱布尼兹和伯努利兄弟二人所解决．约翰的解法(如本书中所介绍的)比较漂亮，而雅可布的解法(虽然颇为麻烦与费劲)则更为一般．这一情况引起两人之间怒气冲冲的口角纷争达数年之久，其所用言辞之粗野很像市井上的对骂而绝非科学讨论．这两人之中约翰的脾气似乎更坏，因为多年后，由于他的孩子获得了他自己渴望获取的法兰西科学院奖金，约翰竟把自己的孩子摔出窗外．

这个孩子叫丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli, 1700—1782)，起初也像他父

亲一样学医，写了一篇关于肺的作用的论文获得医学学位，并且也像他父亲一样马上放弃原业而改攻他天生的专长，成为彼得堡的数学教授．1733 年他回巴塞耳，先后任植物学、解剖学与物理学的教授．他获得法兰西科学院的 10 项奖，其中包括那项惹他父亲恼怒的奖．他在多年内发表了物理学、概率论、微积分和微分方程方面的许多著作．他在一本名著《流体动力学》(Hydrodynamica) 中讨论了流体力学并对气体动力理论作了最早的论述．许多人认为他是第一位真正的数学物理学家．

习 题

1. 设有一根铁丝弯成摆线(8)的形状，并把它象图 10 里那样倒过来．如果有一个串珠从原点处释手而沿铁丝不受阻力下滑，试证它到底点$(\pi a,\ 2a)$处的时间是 $\pi\sqrt{a/g}$.
2. 试证题 1 中的 $\pi\sqrt{a/g}$ 也是串珠由中间任一点下滑到底点所需的时间，所以不管你从那里把串珠释手下滑，它总在同一时间内到达底点．这就是摆线的**等时性**(tautochrone，源自希腊文 tauto 意即相等，+chronos，意即时间)．

第一章杂题

1. 早晨开始下雪整天稳降不停．正午一扫雪车开始扫雪，每小时扫雪量按体积计为常数．到下午 2 点它扫清了两英里路，到下午 4 点又扫清了 1 英里路，问降雪是什么时候开始的？
2. 卫生球半径原为 1/4 英寸，放了一个月之后只有 1/8 英寸．假定它的挥发率正比于它的表面积，试求它的半径同时间的函数关系．再经过几个月后它会完全挥发掉？
3. 一水箱里有 100 加仑纯水．从 $t=0$ 时起有每加仑含 1 磅盐的盐水以每分钟 1 加仑的速率流入箱内，同时混合水(它在箱内经搅拌后成为匀质的) 以同样速率流出箱外．什么时候箱内水里的溶盐量达到 50 磅？
4. 大水箱内装 100 加仑盐水，其中含盐 200 磅．从 $t=0$ 时起纯水以每分钟 3 加仑速率流入，混合水(它经搅动后是匀质的)以每分钟 2 加仑的速率流出．要用多长时间能把箱内含盐量减少到 100 磅？
5. 一个长 12 英寸宽 6 英寸的椭球形的光滑足球在大雨天放在室外场地上．求水从球侧面下流的路线．
6. 若 c 是个正的常数，a 是个正参数，则方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

表示焦点在($\pm c$, 0)处的所有椭圆族($a>c$)和双曲线族($a<c$). 试证这族共焦圆锥曲线是自相正交的(参看题 3-2).

7. 根据托里塞利定律(Torricelli's Law), 从开口水箱底部一小洞流出的水速等于从水面自由下落到小洞处的速度①. 有内半径为 R 的半球形碗原来装满了水, $t=0$ 时在其底点穿一半径为 r 的小圆孔. 问多久后碗内的水漏完?
8. 古代水钟是一个底部有小孔漏水的碗, 在希腊和罗马的法庭里常用来计律师发言的时间以免他们说得太久. 若要使水面匀速下降, 碗该做成什么形状?
9. 两开口水箱从底部同样大的小孔同时漏完水, 一个是正圆柱形的, 另一个是锥顶朝下的正圆锥形的. 若锥底面与圆柱底面相等而圆柱高为 h, 问锥高等于多少?
10. 将装一半水的圆柱形铁罐以等角速度 ω 绕其轴转动. 试证水面呈旋转抛物面形. (提示: 自由水面上质量为 m 的水粒子上所受向心力是 $mx\omega^2$, 其中 x 是该水粒与轴的距离, 而这是由于朝下引力 mg 以及附近其他水粒的法向反作用力 R 所引起的.)
11. 设有铅直平面内的一个圆. 从圆的最高点到圆周上较低点连以铁丝. 若让串珠从最高点沿铁丝无阻地下滑, 试证不管较低点在何处, 它总以同一时间下滑到那里.
12. 有链长 4 尺放桌面上, 开头有 1 尺挂在桌边以下. 若桌面无摩擦力, 问经多久后链完全离开桌面?
13. 经验告诉我们, 人拿住绳子的一头, 绳子绕过木桩, 这样, 人用较小的力, 就能抵住作用于绳子另一头的大得多的力. 从定量观点上, 不难看出, 若绳子在角 θ 与 $\theta+\Delta\theta$ 处的张力是 T 及 $T+\Delta T$ (如图 12), 则绳子作用于 θ 及 $\theta+\Delta\theta$ 间那部分木桩上的法向力大约是 $T\Delta\theta$. 由此可知, 若绳桩间的摩擦系数是 μ, 则 ΔT 约为 $\mu T\Delta\theta$. 试利用这个关系列出 T 与 θ 间的微分方程, 并从这方程作为 θ, μ 以及人所施力 T_0 的函数解出 T.
14. 有一上细下粗的匀质圆柱承负重荷 L. 若柱身密度为 a, 柱顶半径为 r_0, 且柱的水平截面积正比于所承受的总荷, 试求顶面下 x 处的柱半径 r.

---

① 托里塞利(Evangelista Torricelli, 1608—1647)是意大利物理学家兼数学家, 是伽利略的学生兼秘书. 除了上述原理之外, 他还提出关于大气压和真空性质的第一个正确的思想 (这个伽利略差点儿也要发现了), 并且利用他的原理发明了气压表. 参看 James B. Conant《科学与常识》(Science and Common Sense, pp. 63—71, 1951).

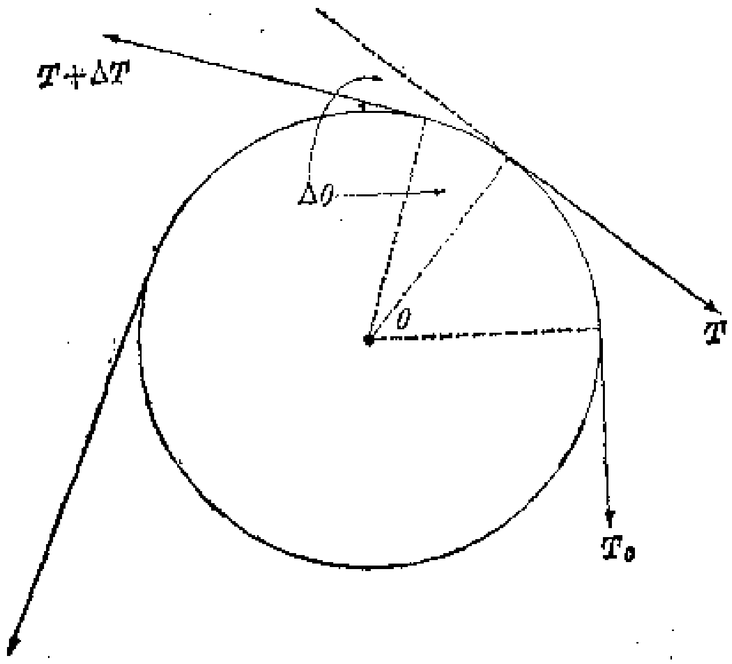


图　12

15. 总统与首相面前同时送上同温度的热咖啡．总统在送到咖啡后立刻加上一点冷奶油，但等了 10 分钟之后才喝．首相则等了 10 分钟之后再添上等量冷奶油后开始喝．问谁喝的咖啡热一些？

16. 驱逐舰在浓雾中搜逐潜水艇．雾一度散开，其时发现潜艇在 3 英里外的海面上，但潜艇立即下潜．驱逐舰速度二倍于潜艇，且已知潜艇下潜后立即以全速朝某一未知的方向直线行进．问驱逐舰应采取什么路线才能保证它会直接开过潜艇的上方？提示：取极坐标系，以发现潜水艇处作为原点．

17. 边长为 a 的四方桌四角上放四个虫子．每个虫子同时以同样的速度走向它右边的那个虫子．若取桌心为原点，以其一对角线为极轴，试求从极轴上出发的那个虫子所走的路线，以及它同所有虫子在桌中心会合以前所走过的总距离．

第二章　一阶方程

7. 齐次方程

一般来说，一阶方程很难解. 即使是看来很简单的方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y),$$

也没有什么一般公式，能使我们在所有情形下得出它的解，所以从这个意义上讲，它并不是一般可能的. 另一方面，有些标准类型的一阶方程是有常规解法的. 这章里要简单讲几类有许多应用的一阶方程. 由于我们的主要目的是熟悉解题技巧，暂且完全不管连续性、可微性及分母可能会等于零等等问题. 有关纯数学方面的一些问题，将在讲解了必要的背景材料之后再来处理.

最简单的标准类型是可分离变量的一阶方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)}.$$

为了解这个方程，只要把它写成 $h(y)dy=g(x)dx$ 再积分就行：

$$\int h(y)dy=\int g(x)dx+c.$$

我们在上章已经看过这种解法的许多例子.

复杂程度稍高一些的是齐次方程. 一个函数 $f(x, y)$ 叫 ***n 次齐次函数***，如果对适当范围内的 x, y 与 t 有

$$f(tx, ty)=t^n f(x, y).$$

例如，x^2+xy, $\sqrt{x^2+y^2}$, 和 $\sin(x/y)$ 分别是 2, 1, 0 次的齐次函数. 微分方程

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$$

叫***齐次的***，如果 M 和 N 是同次的齐次函数. 这时方程可写为

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{1}$$

其中 $f(x,y)=-M(x,y)/N(x,y)$ 显然是 0 次的齐次方程．解(1)的步骤依赖于这一事实：它能通过置换 $z=y/x$ 化为可分离变量的方程．要认识这一点，我们指出，

$$f(tx,ty)=t^0f(x,y)=f(x,y)$$

这一关系使我们能取 $t=\dfrac{1}{x}$ 而得

$$f(x,y)=f(1,y/x)=f(1,z).$$

又因 $y=zx$ 从而

$$\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}, \tag{2}$$

方程(1)就变成

$$z+x\frac{dz}{dx}=f(1,z),$$

于是能把变量分离：

$$\frac{dz}{f(1,z)-z}=\frac{dx}{x}.$$

这就可以通过积分并把 z 换成 y/x 后完全解出(1)．

例 1. 解 $(x+y)dx-(x-y)dy=0.$

先把它写成上述讲解中所提示的形式：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

因右边的函数显然是 0 次齐次函数，故可把它写成 $z=\dfrac{y}{x}$ 的函数．这只要用 x 除分子和分母就行：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y/x}{1-y/x}=\frac{1+z}{1-z}.$$

下一步是代入(2)后分离变量，得到

$$\frac{(1-z)dz}{1+z^2}=\frac{dx}{x},$$

积分后得到

$$\tan^{-1}z-\frac{1}{2}\log(1+z^2)=\log x+c;$$

再把 z 换成 y/x，得所求解为

$$\tan^{-1}\frac{y}{x}=\log\sqrt{x^2+y^2}+c.$$

习　　题

1. 验证下列各方程是齐次方程，并求解：

   a. $(x^2-2y^2)dx+xydy=0$;

   b. $x^2y'-3xy-2y^2=0$;

   c. $x^2y'=3(x^2+y^2)\tan^{-1}\frac{y}{x}+xy$;

   d. $x\sin\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=y\sin\frac{y}{x}+x$;

   e. $xy'=y+2xe^{-y/x}$.

2. 用直角坐标求与 y 轴切于原点的圆族的正交轨线.

3. 试证用置换 $z=ax+by+c$ 可把

$$y'=f(ax+by+c)$$

   变成可分离变量方程，并用此法解下列方程：

   a. $y'=(x+y)^2$;

   b. $y'=\sin^2(x-y+1)$.

4. a. 若 $ae\neq bd$，试证可适当选取常数 h 及 k，使置换 $x=z-h, y=w-k$ 能把

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$$

   化为齐次方程.

   b. 若 $ae=bd$，试找出一个置换，以便将(a)中的方程化为变量分离的方程.

5. 解下列方程：

   a. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+4}{x-y-6}$;

   b. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+4}{x+y-6}$.

8. 恰当方程

如果从曲线族 $f(x,y)=c$ 出发，便得它的微分方程 $df=0$，或

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

例如，曲线族 $x^2y^3=c$ 的微分方程是 $2xy^3dx+3x^2y^2dy=0$。现在倒过来，先从微分方程

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 \tag{1}$$

出发。如果碰巧有一个函数 $f(x, y)$能使

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M \qquad 及 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=N \tag{2}$$

则(1)可写成

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \quad 或 \quad df=0,$$

于是它的通解就是

$$f(x, y)=c.$$

在这情况下，$Mdx+Ndy$ 这个式子叫恰当微分，而(1)叫恰当微分方程。

有时只需通过观察就能确定一式是否恰当而求出函数 f。例如，可以看出

$$ydx+xdy=0 \qquad 及 \qquad \frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

的右边分别是 xy 及 x/y 的微分，故它们的通解分别是 $xy=c$ 及 $x/y=c$。但除了最简单的情形之外，这种"观察求解"法显然是行不通的。这就需要有一种对于恰当性的测试法和寻找函数 f 的一套方法。现把测试法与函数 f 的找法讲述如下。

设(1)是恰当的，因而存在一个函数 f满足方程(2)。我们从初等微积分知道 f 的二阶混合偏导数相等：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}^{①}. \tag{3}$$

---

① 读者应该认识到，当(3)的两边存在并连续时它才成立，而这些条件对实践上可能遇到的几乎所有函数都是满足的。我们整个这一章中笼统假定（参看第7节第一段）所讨论的一切函数都是足够连续与可微的，以保证对它们所作运算都是合法的。

这就有

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}, \tag{4}$$

故(4)是(1)具有恰当性的一个必要条件．现在要证明它也是充分条件，这就是证明用(4)可作出满足方程(2)的一个函数 f．先把(2)的第一个方程对 x 积分：

$$f=\int M dx+g(y). \tag{5}$$

这里的"积分常数"是 y 的一个任意函数，因它在对 x 微分时必须为零．这就把我们的问题化为：找出这样一个函数 $g(y)$，使(5)所给出的 f 能满足(2)的第二个方程．把(5)对 y 微分并使其结果等于 N，得到

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M dx+g'(y)=N,$$

故

$$g'(y)=N-\frac{\partial}{\partial y}\int M dx.$$

这就有

$$g(y)=\int\left(N-\frac{\partial}{\partial y}\int M dx\right)dy, \tag{6}$$

如果这里的被积分式是只含 y 的一个函数的话．这在被积函数对 x 的导数等于 0 的情况下是成立的；因所说导数等于

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N-\frac{\partial}{\partial y}\int M dx\right)=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M dx$$

$$=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int M dx=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y},$$

利用所设(4)，便完成了这个证明．

总的来说，我们证明了下述定理：方程(1)是恰当的，当且仅当 $\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$；在这个条件下，通解是 $f(x,y)=c$，其中 f 由(5)和(6)所给出．这里有两点值得强调指出：(1)的通解是方程 $f(x,y)=c$ 而不仅仅是函数 f；读者应记取的是体现在(5)和(6)中的方法，而不是

公式本身.

例 1. 检验 $e^y dx+(xe^y+2y)dy$ 是否为恰当方程，如果是恰当的，求它的解.

这里有

$$M=e^y \qquad \text{和} \qquad N=xe^y+2y$$

故

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=e^y.$$

所以条件(4)满足，这是个恰当方程. 这告诉我们：存在一个函数 $f(x,y)$ 适合

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=xe^y+2y.$$

把第一式对 x 积分，得到

$$f=\int e^y dx+g(y)=xe^y+g(y),$$

故

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^y+g'(y).$$

因这个偏导数也必须等于 xe^y+2y，故有 $g'(y)=2y$，于是 $g(y)=y^2$，从而 $f=xe^y+y^2$. 现在唯一尚待指出的是，所给微分方程的解是

$$xe^y+y^2=c.$$

习 题

确定下列方程中哪些是恰当的，并解出各恰当方程.

1. $\left(x+\frac{2}{y}\right)dy+ydx=0.$
2. $(\sin x\tan y+1)dx+\cos x\sec^2 y dy=0.$
3. $(y-x^3)dx+(x+y^3)dy=0.$
4. $(2y^2-4x+5)dx=(4-2y+4xy)dy.$
5. $(y+y\cos xy)dx+(x+x\cos xy)dy=0.$
6. $\cos x\cos^2 y dx+2\sin x\sin y\cos y dy=0.$

7. $(\sin x\sin y - xe^y)dy = (e^y + \cos x\cos y)dx.$

8. $-\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}dx + \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}dy = 0.$

9. $(1+y)dx + (1-x)dy = 0.$

10. $(2xy^3 + y\cos x)dx + (3x^2y^2 + \sin x)dy = 0.$

11. $dx = \frac{y}{1-x^2y^2}dx + \frac{x}{1-x^2y^2}dy.$

9. 积分因子

读者也许已经注意到恰当微分方程是相当罕见的，因为方程的形式要准确配合平衡才能具有恰当性，而形式稍变就能破坏这种平衡．既然如此，他就会怀疑是否还值得讨论恰当方程．这一节里我们打算来答复这些疑问．

容易看出，方程

$$ydx + (x^2y - x)dy = 0 \tag{1}$$

不是恰当的，因为 $\partial M/\partial y = 1, \partial N/\partial x = 2xy - 1$．但若用因子 $1/x^2$ 乘整个方程，它就变成恰当的：

$$\frac{y}{x^2}dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0.$$

那末有多少其他非恰当的方程能用这种方法化成恰当的呢？换言之，若

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

不是恰当的，那末在什么条件下能找到这样一个函数 $\mu(x, y)$，以使

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0$$

成为恰当的呢？能起到这种作用的任何函数 μ 叫(2)的一个**积分因子**．例如 $1/x^2$ 是(1)的一个积分因子．现在来证明：若(2)有通解，它就总有一个积分因子．

设(2)有通解

$$f(x, y) = c,$$

微分后消去 c：

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0. \tag{3}$$

由(2)及(3)得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y},$$

故

$$\frac{\partial f/\partial x}{M}=\frac{\partial f/\partial y}{N}. \tag{4}$$

若把(4)中两个相等的比记作 $\mu(x,y)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mu M, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\mu N.$$

用 μ 乘(2)，得

$$\mu M dx+\mu N dy=0$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0,$$

这是个恰当方程. 这一段话说明：若(2)有通解，它就至少有一个积分因子 μ. 事实上，它有无穷多的积分因子；因若 $F(f)$ 是 f 的任一函数，则

$$\mu F(f)(Mdx+Ndy)=F(f)df=d\left[\int F(f)\,df\right],$$

故 $\mu F(f)$ 也是(2)的一个积分因子.

上述讨论还没有谈到怎样找积分因子这个实际问题. 一般来说，这是相当困难的. 不过对于少数情形有成规可循. 要知道这套成规是怎么来的，我们来考察 μ 在什么条件下才是(2)的一个积分因子：

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

把上式都写出来，得到

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

或
$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5}$$

这好像是把解常微分方程(2)的问题"化"成解偏微分方程(5)这个难得多的问题. 另一方面,我们却无需求(5)的通解, 因为任何特解都能使我们达到目的. 从这个观点讲,(5)就比它的外表更有用. 例如,设(2)有一个积分因子是只含 x 的函数. 那时 $\partial\mu/\partial x=d\mu/dx$, $\partial\mu/\partial y=0$, 故(5)就可写成

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N}. \tag{6}$$

因左边是只含 x 的函数,故右边也是. 若令

$$\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N}=g(x),$$

(6)就变成

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=g(x)$$

或

$$\frac{d(\log\mu)}{dx}=g(x).$$

故

$$\log\mu=\int g(x)\,dx,$$

从而

$$\mu=e^{\int g(x)dx}. \tag{7}$$

这个推理过程显然可以倒过来: 若(6)的右边是只含 x 的函数,比方说是 $g(x)$, 则由(7)可得一个只含 x 且满足方程(5)的函数 μ, 因而 μ 是(2)的一个积分因子.

例 1. 就方程(1)而论,我们有

$$\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N}=\frac{1-(2xy-1)}{x^2y-x}=\frac{-2(xy-1)}{x(xy-1)}=-\frac{2}{x},$$

这是只含 x 的函数. 于是

$$\mu = e^{\int -(2/x)dx} = e^{-2\log x} = x^{-2}$$

是(1)的一个积分因子，正如以前所说的一样.

用类似推理可得下面这套相应的做法，它适用于(2)具有只含 y 的积分因子的情形：若

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{-M} \tag{8}$$

是只含 y 的函数，比方说等于 $h(y)$，则

$$\mu = e^{\int h(y)dy} \tag{9}$$

也是只含 y 的一个函数，并满足方程(5)，因而它是(2)的一个积分因子.

另外还有一个有用的办法，可把简单的非恰当方程化为恰当方程. 为说明此法，仍以方程(1)为例，把它改写成：

$$x^2ydy - (xdy - ydx) = 0 \tag{10}$$

括弧里的式子应使读者记起微分公式

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}, \tag{11}$$

这就会使他想到要用 x^2 来除(10). 于是方程便变成 $ydy - d(y/x) = 0$，而它的通解显然是

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{y}{x} = c.$$

这个结果是：我们发现(1)中有 $xdy - ydx$ 这组式子，并根据(11)来利用这个发现而求得了(1)的一个积分因子. 现把在类似情况下常用的一些微分公式写在下面：

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}; \tag{12}$$

$$d(xy) = xdy + ydx; \tag{13}$$

$$d(x^2 + y^2) = 2(xdx + ydy); \tag{14}$$

$$d\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}; \tag{15}$$

$$d\left(\log\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{xy}. \tag{16}$$

从这些公式可以看出，像 $ydx-xdy=0$ 这样一个很简单的微分方程就有$\frac{1}{x^2}$，$\frac{1}{y^2}$，$1/(x^2+y^2)$和$1/xy$ 可以作为它的积分因子，因而可以照此用多种不同的方法来求解.

例 2. 求曲面镜的形状，使它能把原点处的光源反射成一道平行于 x 轴的光线.

这镜面将是曲线 APB(图 13)绕 x 轴的旋转曲面. 从反射律得 $\alpha=\beta$. 根据这里的几何关系，$\phi=\beta,\theta=\alpha+\phi=2\beta$. 因 $\tan\theta=y/x$ 且

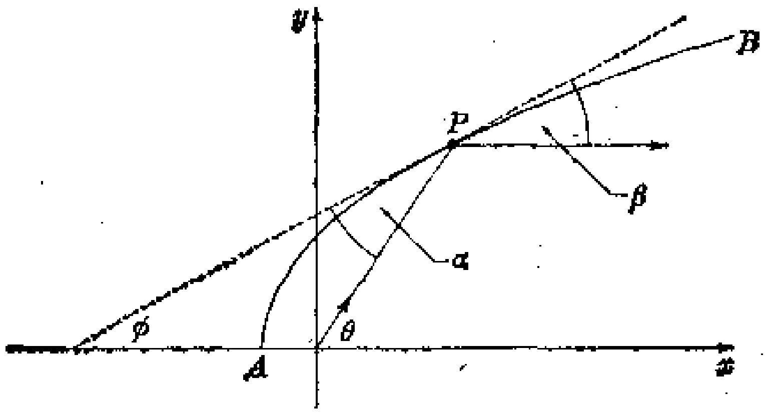


图 13

$$\tan\theta=\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta},$$

故有

$$\frac{y}{x}=\frac{2dy/dx}{1-(dy/dx)^2}.$$

把这二次方程对 dy/dx 解出，得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

或

$$xdx+ydy=\pm\sqrt{x^2+y^2}\,dx.$$

应用(14)，得

$$\pm\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=dx,$$

故

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=x+c.$$

化简后，得到

$$y^2=2cx+c^2,$$

这是以原点为焦点以 x 轴为轴的所有抛物线的方程．初等微积分里常指出所有抛物线都具有这种聚焦性质．这个例子的结论是它的逆命题：具有这种性质的曲线只是抛物线．

习　　题

1. 若 $(\partial M/\partial y-\partial N/\partial x)/(Ny-Mx)$ 是乘积 $z=xy$ 的一个函数 $g(z)$，试证

$$\mu=e^{\int g(z)dz}$$

   是方程(2)的一个积分因子．
2. 用求积分因子的方法解下列各方程：
   a. $(3x^2-y^2)dy-2xydx=0$；
   b. $(xy-1)dx+(x^2-xy)dy=0$；
   c. $xdy+ydx+3x^3y^4dy=0$．
3. 在什么情况下方程(2)的积分因子是和 $z=x+y$ 的一个函数？
4. 解下列各方程：
   a. $xdy-ydx=(1+y^2)dy$；
   b. $ydx-xdy=xy^3dy$；
   c. $xdy=(x^5+x^3y^2+y)dx$；
   d. $(y+x)dy=(y-x)dx$；
   e. $xdy=(y+x^2+9y^2)dx$．

10．线性方程

最重要的微分方程是线性方程，其中最高阶导数是较低阶导数的线性函数．例如，一般一阶线性方程是

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x),$$

一般二阶线性方程是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y+r(x),$$

等等．这里右边的系数如 $p(x), q(x), r(x)$ 等等都是只含 x 的函数．

现在要讲的是一般一阶线性方程，它的标准形式是

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x). \tag{1}$$

解这方程的最简单方法依赖于下列事实：

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}y\right)=e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx}+yPe^{\int Pdx}=e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx}+Py\right). \tag{2}$$

故若用 $e^{\int Pdx}$ 乘(1)，它就变成

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}y\right)=Qe^{\int Pdx}. \tag{3}$$

积分后得到

$$e^{\int Pdx}y=\int Qe^{\int Pdx}dx+c.$$

故(1)的通解是

$$y=e^{-\int Pdx}\left(\int Q\,e^{\int Pdx}dx+c\right). \tag{4}$$

例 1. 解 $\quad \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=3x.$

这显然是线性方程，其中 $P=\dfrac{1}{x}$，故有

$$\int P\,dx=\int\frac{1}{x}dx=\log x, \qquad e^{\int Pdx}=e^{\log x}=x.$$

用 x 乘方程并利用(3)，得到

$$\frac{d}{dx}(xy)=3x^2,$$

故

$$xy=x^3+c, \qquad \text{或} \qquad y=x^2+cx^{-1}.$$

这个例子的解法说明，我们不应在解线性方程时死记复杂的公式(4)而机械套用. 相反，如果能把导出(4)的那套做法(用$e^{\int Pdx}$去乘，然后积分)记住并加以运用要比这好得多. 上述讨论的一个缺点是：积分因子 $e^{\int Pdx}$ 好像是玩魔术似地空手抓出来的. 下面我们在习题 1 中让读者用第 9 节所讲方法自己去发现.

习 题

1. 把(1)写成 $Mdx+Ndy=0$，并用第 9 节的思想证明这个方程具有一个只含 x 的积分因子 μ. 求出 μ 并把 $\mu Mdx+\mu Ndy=0$ 作为恰当方程解出以得到(4).
2. 解下列线性方程：

   a. $x\dfrac{dy}{dx}-3y=x^4$；　　d. $y'+y=2xe^{-x}+x^2$；

   b. $y'+y=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$；　　e. $y'+y\cot x=2x\csc x$；

   c. $(1+x^2)dy+2xydx=\cot x dx$；　　f. $(2y-x^3)dx=xdy$.
3. 方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

   叫伯努利方程，它在 $n=0$ 或 1 时是线性的. 试证对任何别的 n 值可通过变量置换 $z=y^{1-n}$ 把它化为线性方程，并用这个方法解下列各方程：

   a. $xy'+y=x^4y^3$；

   b. $xy^2y'+y^3=x\cos x$
4. 常用的记号 dy/dx 说明 x 是自变量而 y 是因变量. 在试解微分方程时，若先把 x 换成 y 并把 y 换成 x，然后解变换后的新方程，常常能有所帮助. 试用此法解下列方程：

   a. $(e^y-2xy)y'=y^2$；

   b. $y-xy'=y'y^2e^y$.
5. 求曲线族 $y=x+ce^{-x}$ 的正交轨线.
6. 从(4)可知一阶线性方程的通解是下列形式的曲线族：

$$y=cf(x)+g(x).$$

现在倒过来试证任何这类曲线族的微分方程是线性的.

11. 降阶法

一般二阶微分方程的形式是

$$F(x, y, y', y'')=0.$$

这一节里要讲两种特殊类型的二阶方程，它们是能化为一阶方程来解的.

缺因变量的方程 若二阶方程不显含 y, 则这种方程可写为

$$f(x, y', y'')=0. \tag{1}$$

这时可引入新的因变量 p, 令

$$y'=p, \qquad y''=\frac{dp}{dx}. \tag{2}$$

这就把(1)变成一阶方程

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)=0. \tag{3}$$

若能求出(3)的一个解，就可把这个解里的 p 换成 dy/dx, 然后设法解所得结果. 这种做法把解二阶方程(1)的问题化为先后解两个一阶方程的问题.

例 1. 解 $xy''-y'=3x^2$.

这方程里没有变量 y, 故用(2)可把它化为

$$x\frac{dp}{dx}-p=3x^2$$

或

$$\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=3x,$$

这是个线性方程. 用第 10 节的方法来解，得到

$$p=\frac{dy}{dx}=3x^2+c_1x,$$

故

$$y=x^3+\frac{1}{2}c_1x^2+c_2$$

即为所求的解.

缺自变量的方程　若二阶方程不显含 x, 则这种方程可写为

$$g(y, y', y'')=0. \tag{4}$$

这里仍以同样方式引入新的因变量 p, 但这次是用对 y 的导数来表示 y'' 的:

$$y'=p, \qquad y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}. \tag{5}$$

于是(4)可写为

$$g\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right)=0; \tag{6}$$

从这以后就可以照以前所讲那样先后解出两个一阶方程.

例 2. 解　$y''+k^2y=0$.

用(5)可把这方程写成

$$p\frac{dp}{dy}+k^2y=0 \qquad 或 \qquad pdp+k^2ydy=0.$$

积分后得到

$$p^2+k^2y^2=k^2a^2,$$

故

$$p=\frac{dy}{dx}=\pm k\sqrt{a^2-y^2}$$

或

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\pm kdx.$$

再积一次, 得到

$$\sin^{-1}\frac{y}{a}=\pm kx+b.$$

故有

$$y=a\sin(\pm kx+b) \quad 或 \quad y=A\sin(kx+B).$$

也可以把 $\sin(kx+B)$ 展开后改变常数的形式，把通解写成

$$y=c_1\sin kx+c_2\cos kx. \tag{7}$$

例 2 中所解的方程在应用中经常遇到(见第 5 节). 它是线性的，它的解(7)将用到下章讲的二阶线性方程的一般理论中去.

习 题

1. 解下列方程:

   a. $yy''+(y')^2=0$;

   b. $xy''=y'+(y')^3$;

   c. $y''-k^2y=0$;

   d. $x^2y''=2xy'+(y')^2$.

2. 求下列方程的特解:

   a. $(x^2+2y')y''+2xy'=0$; 当 $x=0$ 时, $y=1$, $y'=0$;

   b. $yy''=y^2y'+(y')^2$; 当 $x=0$ 时, $y=-\frac{1}{2}$, $y'=1$.

3. 用本节所讲两种方法解 $y''=1+(y')^2$ 并说明所得结果一致.

4. 设有一金属线弯成摆线的形状，其参数方程是 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$, 并把它倒过来放成像图 10 中的那样. 若把一串珠从线上释手下滑时只受重力作用而无摩擦力，试证其速度 v 满足方程

   $$4av^2=g(s_0^2-s^2),$$

   其中 s_0 与 s 分别是串珠从最低位置到其初始位置及其以后任一时刻位置的距离. 微分后得方程

   $$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{4a}s=0,$$

   并由此试作为 t 的一个函数求出 s, 并定出运动的周期. 注意，这些结果可证实习题 6-2 中所讨论关于沿摆线摆动的等时性.

12. 悬链. 追线

现在讨论几个应用问题，它们所引出的微分方程能够用本章所讲方法求解.

例 1. 求两点间的柔软悬链在其自身重量作用下所取的形状.

设 y 轴通过链的最低点(图 14)，令 s 表自该点到可变点 (x, y) 之间的弧长，并令 $w(s)$ 为链的线密度. 根据从最低点到 (x,y) 间的一段

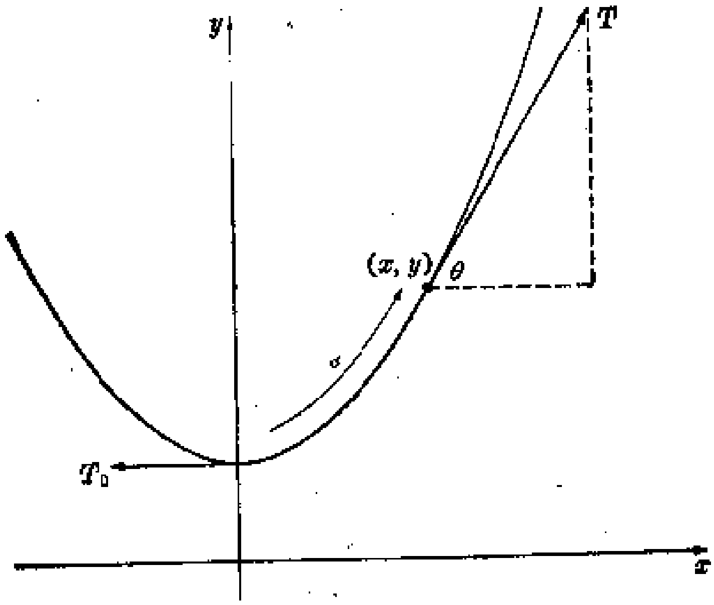


图 14

链在三种力作用下处于平衡状态这一事实可导出曲线方程. 这三种力是: 最低点处的水平方向张力 T_0; 在 (x, y) 处的可变张力, 由于链身柔软, 所以这张力是沿切线方向作用的; 还有一个朝下的力等于两点间那段链身的重量. 使 T 的水平分量等于 T_0 并使 T 的垂直分量等于链重, 得到

$$T\cos\theta = T_0 \qquad \text{及} \qquad T\sin\theta = \int_0^s w(s)\,ds.$$

从第一式得

$$T\sin\theta = T_0\tan\theta = T_0\frac{dy}{dx},$$

故

$$T_0y' = \int_0^s w(s)\,ds.$$

对 x 微分以消去这里的积分号:

$$T_0y'' = \frac{d}{dx}\int_0^s w(s)\,ds = \frac{d}{ds}\int_0^s w(s)\,ds\,\frac{ds}{dx}$$
$$= w(s)\sqrt{1+(y')^2}.$$

这样

$$T_0y'' = w(s)\sqrt{1+(y')^2} \tag{1}$$

便是所求曲线的微分方程，而解出这微分方程便可得所求曲线本身. 为进一步计算, 必须确实知道函数 $w(s)$. 现在就 $w(s)$ 是个常数 w_0 的情况来解(1), 这样

$$y''=a\sqrt{1+(y')^2}, \qquad a=w_0/T_0. \tag{2}$$

如同在第11节中那样, 代入 $y'=p$, $y''=dp/dx$, (2)就变为

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=adx. \tag{3}$$

把(3)积分并利用当 $x=0$ 时 $p=0$ 这一事实, 得到

$$\log(p+\sqrt{1+p^2})=ax.$$

解出 p 得

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax}).$$

若把 x 轴取在合适位置, 使当 $x=0$ 时 $y=1/a$, 则得到

$$y=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})=\frac{1}{a}\cosh ax,$$

这就是均匀软链悬挂时在其自身重量作用下所取形状的曲线方程. 这曲线叫悬链线, 它的英文名称 catenary, 来源于拉丁文 catena, 意即链. 悬链线也出现在其他一些有趣的问题上. 例如, 在第 9 章中将要证明: 若用一曲线弧连接 x 轴上方二给定点, 并将该弧绕 x 轴转成旋转曲面, 则当此弧是悬链线的一部分时, 所得旋转曲面的面积最小.

例 2. 一点 P 被一根长度为 a 的线在 xy 平面上牵曳. 若 T 从原点开始沿正 y 轴移动, 而 P 从 $(a, 0)$ 处开始动, 求 P 的路线. 这一曲线叫曳线(tractrix, 源自拉丁文 tractum, 意即牵曳).

从图 15 易见这路线的微分方程是

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

分离变量后积分, 并利用当 $x=a$ 时 $y=0$ 这一事实, 得到

$$y=a\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)-\sqrt{a^2-x^2},$$

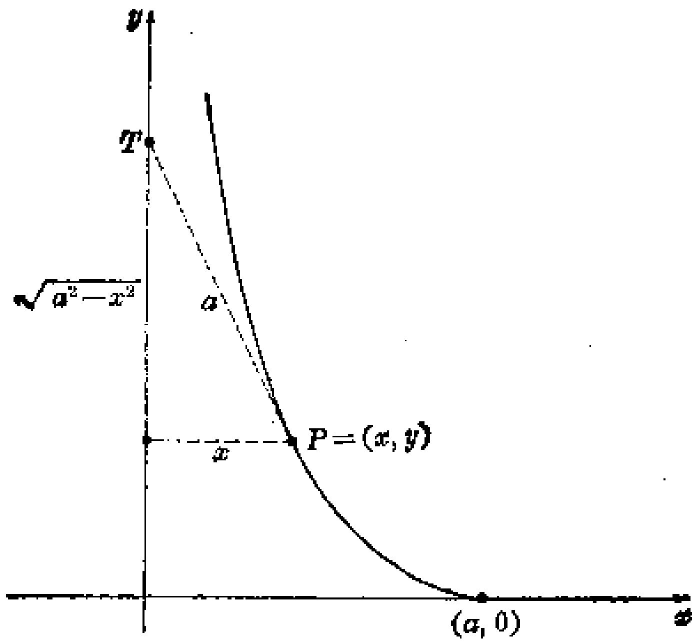


图 15

这就是曳线的方程. 这曲线相当重要, 因它绕 y 轴旋转而成的曲面可作为解释罗巴切夫斯基非欧几何的模型.

例 3. 兔从原点出发以速度 a 沿 y 轴往上跑. 同时有狗从 $(c, 0)$ 点出发以速度 b 追兔. 求狗追逐的路线.

在从两者出发时算起的时间 t, 兔到达 $R=(0, at)$ 点, 狗到 $D=(x, y)$ (图 16). 因直线 DR 与路线相切, 故有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-at}{x} \quad \text{或} \quad xy'-y=-at. \tag{4}$$

为消去 t, 先把(4)对 x 微分, 得到

$$xy''=-a\frac{dt}{dx}. \tag{5}$$

代入 $ds/dt=b$, 得到

$$\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}=-\frac{1}{b}\sqrt{1+(y')^2}, \tag{6}$$

这里有负号是因为 s 随 x 的减小而增大. 结合(5)与(6), 得到路线的微分方程:

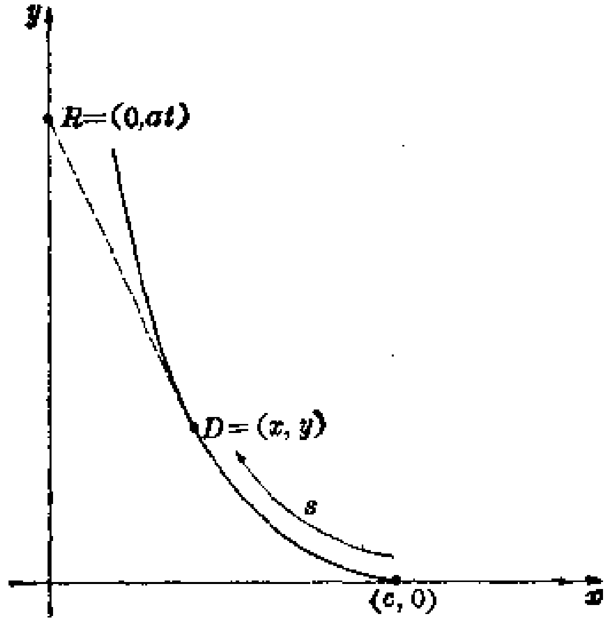


图 16

$$xy''=k\sqrt{1+(y')^2}, \qquad k=a/b. \tag{7}$$

作置换 $y'=p$ 及 $y''=dp/dx$ 后，(7)化为

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=k\frac{dx}{x};$$

积分并利用初始条件：$x=c$ 时 $p=0$，得到

$$\log(p+\sqrt{1+p^2})=\log(x/c)^k.$$

由此容易解出 p，得到

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^k-\left(\frac{c}{x}\right)^k\right].$$

要继续求 y 是 x 的怎样一个函数，必须进一步确定 k. 请读者在题 8 中探讨多种可能的情形。

例 4. 设 y 轴及直线 $x=c$ 是河岸，河水以匀速 a 朝负 y 轴方向流动。小船从 $(c,\ 0)$ 处入河以相对于河水的速度 b 直接朝原点行驶。求船行路线。

小船速度的分量(图 17)是

$$\frac{dx}{dt}=-b\cos\theta, \qquad \frac{dy}{dt}=-a+b\sin\theta,$$

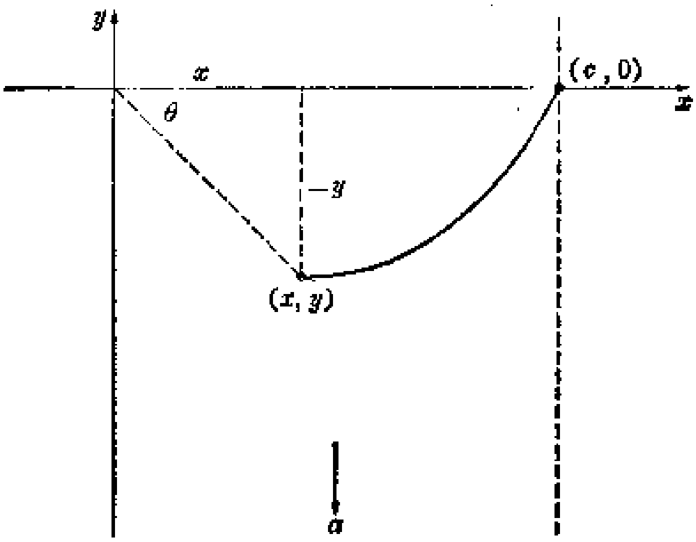


图 17

故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-a+b\sin\theta}{-b\cos\theta}=\frac{-a+b(-y/\sqrt{x^2+y^2})}{-b(x/\sqrt{x^2+y^2})}$$

$$=\frac{a\sqrt{x^2+y^2}+by}{bx}.$$

这是个齐次方程，用第 7 节的方法求得它的解是

$$c^k(y+\sqrt{x^2+y^2})=x^{k+1},$$

其中 $k=a/b$. 船的去向显然要取决于 a 与 b 的关系. 请读者在习题 9 中去发现在什么条件下船能安抵彼岸.

习 题

1. 试证例题 1 中链上任一点 (x, y) 处的张力 T 是 w_0y.
2. 若例 1 中的链上载有水平密度为 $L(x)$ 的重荷，这时应该用什么微分方程来代替 (1)？
3. 若用密度可以忽略 [这样 $w(s)=0$] 的缆索架桥，而桥身的水平密度是 $L(x)=L_0$，问缆索的形状如何？
4. 若均匀密度弹性缆上任一小段的长度正比于其中的张力，试证它在自身重量作用下悬挂时呈抛物线形.
5. 在密度可以忽略的横索上悬挂一些细杆制成一帘子. 若各杆靠得很近且水平等距，且帘子的底部剪齐呈水平线，问横索呈什么形状？

6. 若 x 轴以上的一根曲线有下述性质：其上两点间的弧长正比于弧下的面积，问这是什么曲线？
7. 试证例 2 中的曳线与中心在 y 轴上而半径为 a 的一族圆正交.
8. a. 若设例 3 中的 $a<b$(从而 $k<1$)，试求 y 与 x 的函数关系. 兔被狗捕捉前能跑多远？

   b. 设 $a=b$，试求 $y(x)$. 狗能接近兔到什么程度？
9. 在例 4 中从行驶路线方程解出 y，并确定 a 与 b 须满足什么条件才能使小船到达彼岸. 船在何处登岸？

13. 简单电路

这一节里讲图 18 所示简单电路中的电流所遵循的线性微分方程. 电路里含四个元件，它们的作用很容易了解，无需专门电学知识.

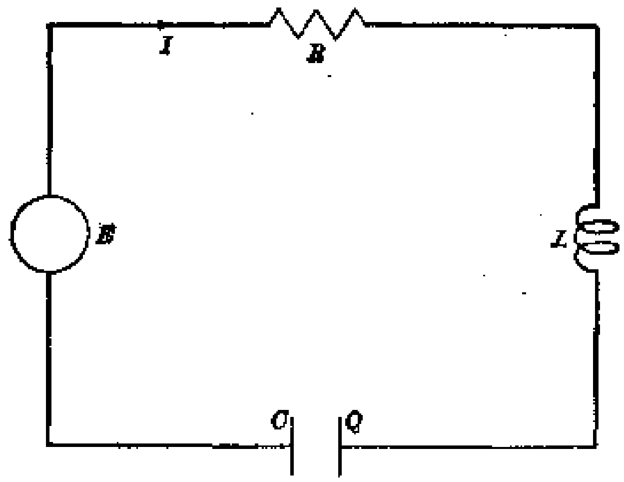


图 18

A. 电动势为 E 的电源——电池或发电机，它能推动电荷产生电流 I. 随着电源性质的不同，E 可能是常量或者是时间的函数.

B. 电阻为 R 的电阻器，它引起量值为 $E_R=RI$ 的电势降而阻挡电流. $E_R=RI$ 这个方程叫**欧姆定律**①.

① 欧姆(Georg Simon Ohm, 1787—1854)是德国物理学家，他对科学的唯一重要贡献是发现了这一定律. 当他在 1827 年发表这定律时，人们以为它太理想而不敢置信. 欧姆因此被人认为不可靠而备受歧视，迫使他辞去科伦大学的教授，过了若干年微贱贫困的生活之后才被人承认他的发现是正确的. 狄利克雷(Peter Dirichlet)是他在科伦大学的一个学生，此人其后成为德国十九世纪最杰出的数学家之一.

C. 电感为L的电感器，它产生数值为

$$E_L=L\frac{dI}{dt}$$

的电势降，阻挡电流的任何变动.

D. 电容为C的电容器，它能储存电荷Q. 它所储的电荷阻挡电荷的进一步流入，由此所产生的电势降是

$$E_C=\frac{1}{C}Q.$$

又因电流是电荷的流动率，从而即是电荷在电容器上的蓄储率，故有

$$I=\frac{dQ}{dt}.$$

根据**克希荷夫定律**，沿闭电路的电动势的代数和等于零①. 上述元件就按这定律在电路中共同起作用. 这定律告诉我们:

$$E-E_R-E_L-E_C=0$$

即

$$E-RI-L\frac{dI}{dt}-\frac{1}{C}Q=0,$$

这式子还可以改写成

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}Q=E. \tag{1}$$

根据需要，可取I或Q作为因变量. 在第一种情形下，可把(1)对t微分并把dQ/dt记为I便可消去Q:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dE}{dt}. \tag{2}$$

在第二种情形下，只要把I换成dQ/dt即可:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E. \tag{3}$$

---

① 克希荷夫(Gustav Robert Kirchhoff 1824—87)，另一德国科学家，他在电路方面的工作是每个学过初等物理的人都熟悉的. 他又提出光谱分析原理，为利用光谱分析以确定恒星的化学成份铺平了道路.

以后我们将更详细地讨论这些二阶线性方程．这一节里主要是讲一阶线性方程

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E, \tag{4}$$

这是(1)在电路中没有电容器时的形式．

例 1. 若当 $t=0$ 时电路中有初始电流 I_0 并接上稳恒电动势 E_0，试解这种情形下的(4)．

对 $t\geqslant 0$，这个方程是

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E_0,$$

分离变量，得到

$$\frac{dI}{E_0-RI}=\frac{1}{L}dt.$$

积分，并利用当 $t=0$ 时 $I=I_0$ 这个初始条件，得到

$$\log(E_0-RI)=-\frac{R}{L}t+\log(E_0-RI_0),$$

故有

$$I=\frac{E_0}{R}+\left(I_0-\frac{E_0}{R}\right)e^{-Rt/L}.$$

注意，电流 I 由稳态部分 E_0/R 及暂态部分 $\left(I_0-\frac{E_0}{R}\right)e^{-Rt/L}$ 组成，后者随 t 的增大而趋于零．因此，对大的 t 值欧姆定律几乎完全成立．又，若 $I_0=0$，则

$$I=\frac{E_0}{R}(1-e^{-Rt/L}),$$

而若 $E_0=0$，则 $I=I_0e^{-Rt/L}$．

习　题

1. 设电路中当 $t=0$ 时有初始电流 I_0 而外加电动势如下述，求解方程(4)：
   a. $E=E_0e^{-kt}$.　　　　b. $E=E_0\sin\omega t$.
2. 设有方程(4)所描述的一个电路，试证

a. 一旦电流达极大或极小值时，欧姆定律就成立.

b. 当电流达极大值时电动势增大，当电流达极小值时电动势减小.

第2章杂题

下列25个微分方程可作为本章所讲各类微分方程的代表，试求它们的解.

1. $yy''=(y')^2$.
2. $(1-xy)y'=y^2$.
3. $(2x+3y+1)dx+(2y-3x+5)dy=0$.
4. $xy'=\sqrt{x^2+y^2}$.
5. $y^2dx=(x^3-xy)dy$.
6. $(x^2y^3+y)dx=(x^3y^2-x)dy$.
7. $yy''+(y')^2-2yy'=0$.
8. $xdy+ydx=x\cos x dx$.
9. $xydy=x^2dy+y^2dx$.
10. $(e^x-3x^2y^2)y'+ye^x=2xy^3$.
11. $y''+2x(y')^2=0$.
12. $(x^2+y)dx=xdy$.
13. $xy'+y=x^3\cos x$.
14. $(6x+4y+3)dx+(3x+2y+2)dy=0$.
15. $\cos(x+y)dx=x\sin(x+y)dx+x\sin(x+y)dy$.
16. $x^2y''+xy'=1$.
17. $(y^2e^{xy}+\cos x)dx+(e^{xy}+xye^{xy})dy=0$.
18. $y'\log(x-y)=1+\log(x-y)$.
19. $y'+2xy=e^{-x^2}$.
20. $(y^2-3xy-2x^2)dx=(x^2-xy)dy$.
21. $(1+x^2)y'+2xy=4x^3$.
22. $e^x\sin y dx+e^x\cos y dy=y\sin xy dx+x\sin xy dy$.
23. $(1+x^2)y''+xy'=0$.
24. $(xe^y+y-x^2)dy=(2xy-e^y-x)dx$.
25. $e^x(1+x)dx=(xe^x-ye^y)dy$.
26. 设放射性元素A蜕变为第二种放射性元素B，而B又蜕变为第三种元素C. 若A的初始量是x_0，而在其后t时A和B的量各为x和y，又若k_1和k_2是这两种反应的速率常数，试求y与t的函数关系.

27. 含 50 加仑盐水的水槽中溶有 25 磅盐. 从 $t=0$ 时起有清水以每秒 2 加仑的速率流入，而混合水以同样速率通过第二个原有 50 加仑纯水的水槽流出. 问第二槽中的含盐量在什么时刻达极大值？

28. 一阶线性方程

$$y'=p(x)+q(x)y$$

的自然推广是黎卡提方程[①]

$$y'=p(x)+q(x)y+r(x)y^2.$$

一般来说，这个方程不能用初等方法求解. 但若已知一特解 $y_1(x)$，则通解的形式是

$$y(x)=y_1(x)+z(x),$$

其中 $z(x)$ 是伯努利方程

$$z'-(q+2ry_1)z=rz^2$$

的通解，试证之，并求方程

$$y'=\frac{y}{x}+x^3y^2-x^5$$

（它显然以 $y_1(x)=x$ 为一特解）的通解.

具有可变质量的动力学问题 对第 1 节所给形式的牛顿第二定律

$$F=ma,$$

我们已在前面讲过许多应用. 这里 F 是作用在质量为 m 的物体上的力，a 是它的加速度. 但定律的这种形式只适用于质量不变的情况. 实际上牛顿定律比这还要一般些，它所陈述的是：当力 F 作用于质量为 m 的物体上时，所产生的动量（mv，v 是速度）变化率等于这个力：

$$F=\frac{d}{dt}(mv).$$

---

① 黎卡提(Count Jacopo Francesco Riccati, 1676—1754)，意大利学者，写过数学、物理和哲学著作，对于向意大利介绍牛顿的思想起主要作用. 他一度被邀去彼得堡任科学院院长，但感意大利悠闲舒适的贵族生活胜于在俄国担任行政职务而未去. 他虽在当时科学界负有盛名，但今日只靠这个以他命名的微分方程留名. 而且甚至这也是出于历史上的偶然原因，因他只讨论这个方程的一些特例，并未提出任何解法，而这些特例都由伯努利家族的一些成员成功解决.（参看 G. N. Watson 著《A Treatise on the Theory of Bessel Functions》第 2 版 pp. 1—3, Cambridge, London）. 对特殊黎卡提方程 $y'+by^2=cx^m$，已知当且仅当 $m=-2$ 或具有 $\frac{-4k}{(2k+1)}$ 这种形式（k 为某一整数）时可用有限项解出（见下面的习题 35-8）.

当m不变时，上式变为$F=ma$. 在把这种形式的牛顿第二定律应用于质量可变的运动物体时，必须把由F所产生的动量与来自外界的、结合在该物体上的质量所产生的动量加以区别. 例如，若有速度为$v+w$的另一个质量(因而它相对于m的速度是w)以$\frac{dm}{dt}$的速率加到m上，则F对于增加动量所起的作用必须用$(v+w)dm/dt$来加以补充，而有

$$(v+w)\frac{dm}{dt}+F=\frac{d}{dt}(mv),$$

它可简化为

$$w\frac{dm}{dt}+F=m\frac{dv}{dt}.$$

这里要指出，按物体质量的增减，$\frac{dm}{dt}$分别为正或为负，而w的正负则由m所增或减的那部分质量的运动而定. 以下的习题提供一些说明这种思想的例子.

29. 构体质量为m_1的火箭装有初始燃料m_2. 若以固定速率a燃烧燃料(于是$dm/dt=-a$, 其中m是火箭的可变总质量)，并将燃烧后的废气以相对于火箭的固定速度b排出，使火箭从地面垂直上升. 如果除重力mg外(这里假定g是常数)忽略其余一切外力，试求燃料烧尽时火箭的速度和所达高度(燃尽速度和燃尽高度).

30. 从静止出发的球形雨滴受重力作用下降. 若它在下降过程中吸附水蒸汽(假定是静止的)，吸附速率正比于雨滴的表面积，且若它的初始半径是0, 试证它以等加速度$g/4$下降.

31. 球形雨滴从静止下降通过均匀雾层. 若它下降时吸附小水滴(假定是静止的)，且若它的初始半径是0, 试证它下降时具有等加速度$g/7$.

32. 根据爱因斯坦的特殊相对论，以速度v运动的粒子，其质量m的公式是

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{*}$$

这里c是光速，m_0是静止质量.

a. 若质点在真空中从静止出发，在不变的引力场作用下作长时间的运动，取$w=-v$, 试求v与时间t的函数关系，并证明$t\to\infty$时$v\to c$[①].

b. 设$M=m-m_0$是粒子质量的增量. 若取其能量的相应增量E为其所受力F对它所做的功，从而有

---

① 费米(Enrico Fermi)提出：若拿这种现象来看待带电星际尘被恒星磁场加速的过程，就可对最初的宇宙线的来源问题提供部分解释.

$$E=\int_0^v Fdx=\int_0^v \frac{d}{dt}(mv)dx=\int_0^v vd(mv),$$

试证

$$E=Mc^2 \tag{**}$$

c. 试从(**)导出(*).

附录 A. 数值方法

本章讲过了用公式解某几类一阶方程的一些技巧. 遗憾的是, 对于实际工作中产生的微分方程, 这些技巧并不总能用得上. 在这种情形下怎么办? 读者也许知道辛普生法则, 可用来算定积分的数值, 达到所需的任何准确度. 这个方法无需求助于相应不定积分的公式. 同样, 在给定初始条件下, 对于几乎所有的一阶微分方程, 也有几种方法, 能把它的数值解计算到任意准确度, 而且不管方程的解能否用熟悉的初等函数公式表出, 这些方法都能用. 对这种方法的研究, 是**数值分析**这个数学分支的内容之一, 而这个分支的目的则是以十进数字的形式近似算出数学问题的解答.

为说明微分方程的数值解是怎么一回事, 我们来考察简单的初值问题

$$y'=y, \qquad y(0)=1. \tag{1}$$

这问题的解显然是 $y=e^x$, 对大多数理论问题说, 这就够了. 但在实际应用上, 也许得知道当$x=0.5$时这个解的数值, 而$e^{0.5}$这个记号很可能不如十进数字 1.649 那样有用. 这样就不用公式 $y=e^x$ 给出(1)的理论解, 而用 e^x 的数值表给出(1)的数值解.

在这附录里, 我们就下列形式的初值问题: 讲几种求近似数值解的方法:

$$y'=f(x,y), \qquad y(x_0)=y_0, \tag{2}$$

我们将假定这问题具有唯一的解 $y(x)$. 这些方法所包括的一些计算步骤, 只根据(2)所提供的材料, 而与是否知道$y(x)$的公式无关. 所以对于那些不能确切解出的初值问题, 或者虽能求出解的确切公式, 但

其中包含重重隐函数，使它几乎没有实用价值，在那种情形下，这些数值方法(以及与之类似的其他方法)就是我们的最后一着棋了.

现在把这些方法的本质讲得更具体些. 我们并不对某个区间内的一切 x 值来求确切解 $y(x)$ 的近似值，而只是对从 x_0 起的一系列离散点来求，比如说是

$$x_0,\ x_1=x_0+h,\ x_2=x_1+h,\ \cdots,$$

这里 h 是个正数. 这就是说，我们要得出确切值 $y(x_1)$ 的一个近似值 y_1，确切值 $y(x_2)$ 的一个近似值 y_2 等等. 所要讲的每种数值方法都是用 y_n 来算 y_{n+1} 的法则. 因已知初值 $y(x_0)=y_0$(这是确切的)，那就可用这个法则，当 $n=0$ 时得出 y_1，当 $n=1$ 时得出 y_2，等等. 我们总的目的是把每种方法的细节讲得足够多，使读者碰到需要时能自己去运用①.

现在拿一个很简单的问题

$$y'=x+y,\qquad y(0)=1 \tag{3}$$

(叫它试验问题)作为例子，来说明我们所讲的方法. 微分方程(3)显然是线性的，并不难求出它的确切解

$$y=2e^x-x-1. \tag{4}$$

取(3)作为试验问题是出于两种原因. 第一，它很简单，以便对它应用数值方法，而不致使主要步骤被一大堆繁重计算搞糊涂. 第二，对于不同的 x 值，易于用 e^x 的数值表算出(4)的确切解的值，这就可以判断我们那个数值方法得出的近似解准确度如何.

欧拉法 若把(2)中的微分方程从 x_0 到 $x_1=x_0+h$ 积分，并利用初始条件 $y(x_0)=y_0$，则得

$$y(x_1)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x_1}f(x,y)\,dx,$$

① 为进一步讨论这些方法，包括对误差与准确度这些困难问题的慎重处理，可参阅 J. B. Scarborough 著《数值分析》(Numerical Mathematical Analysis)，或 W. Jennings 著《数值方法初阶》(First Course in Numerical Methods).

或

$$y(x_1)=y_0+\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dx. \tag{5}$$

因(5)的积分号下有未知函数 $y=y(x)$，所以除非对这积分作出某种近似，那就不能前进一步，而每一种近似就确定(2)的一种数值解法.

欧拉法很简单但颇粗率. 它之所以值得一讲是因它能对理解其他更精确然而也更复杂的方法铺平道路. 这个方法的中心思想是：假定(5)中的被积函数 $f(x,y)$ 在区间 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上变动很小，因而若用它在左端点的值 $f(x_0, y_0)$ 来代替它只会产生微小误差，借以求出 $y(x_1)$ 的近似值 y_1：

$$\begin{aligned} y_1&=y_0+\int_{x_0}^{x_1} f(x_0,y_0)dx=y_0+f(x_0,y_0)(x_1-x_0)\\ &=y_0+hf(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{6}$$

现在照样用公式 $y_2=y_1+hf(x_1,y_1)$ 来从 y_1 得出 y_2；一般有

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n). \tag{7}$$

这些公式的几何意义如图 19 所示，其中光滑曲线是(2)的那个未知的确切解，现今用折线作为它的近似. 为理解这个图的意义，应记取 $f(x_0,y_0)$是曲线在初始点(x_0,y_0)处切线的斜率.

现在用欧拉法来解这个试验问题(3)以说明这一方法. 我们用长 $h=0.2$ 的分段来求解在点 $x_n=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 及 1.0 处的近似值. 为方便起见，可把计算步骤列成表 1. 在表的第 1 行中，初始条件($x=0$

表 1

x_n	y_n	斜率$=x_n+y_n$	$y_n+0.2$(斜率)$=y_{n+1}$
0.0	1.00	1.00	1.00+0.2(1.00)=1.20
0.2	1.20	1.40	1.20+0.2(1.40)=1.48
0.4	1.48	1.88	1.48+0.2(1.88)=1.86
0.6	1.86	2.46	1.86+0.2(2.46)=2.35
0.8	2.35	3.15	2.35+0.2(3.15)=2.98
1.0	2.98		

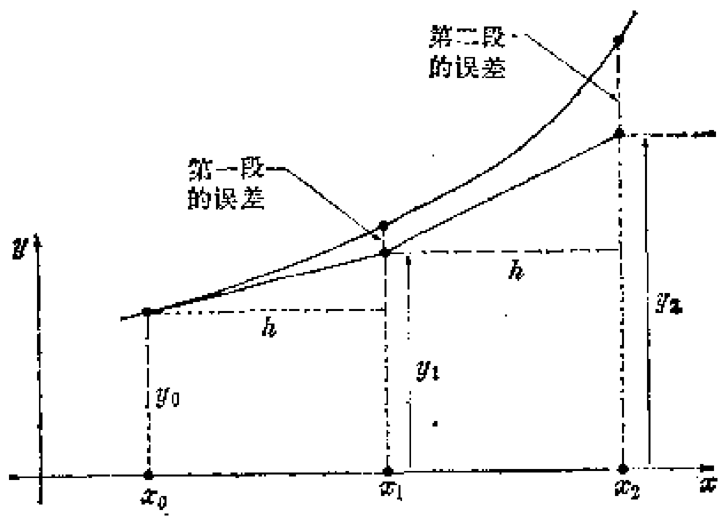


图 19

时 $y=1$)定出一个斜率 $y'=x+y=1.00$. 因 $h=0.2$ 而 $y_1=y_0+hf(x_0, y_0)$, 故得出次一个值 y_1 为 $1.00+0.2(1.00)=1.20$. 然后把这近似值写到下一行的 y_n 栏中，重复以上的计算步骤以得出 y_2，其结果为1.48. 这里小数点后只取两位数字，结果得到 $y(1)$的近似值为 2.98. 从(4)求得的确值是 3.43656，故误差约为百分之 14. 若取 $h=0.1$ 并作同样的计算，则得 $y(1)$的近似值是 3.18，误差减小到约 8%. 故若取较小的 h 值便可改进这方法的精确度，但须化费较多的计算工作.

改进的欧拉法　这种程度的误差(14 与 8%)显然是不能令人满意的. 它们诚然可因取小得多的 h 值而得到相当减小，但莫如另找更准确的方法为妙. 例如，(5)中被积函数若以它在区间左右端点处之值的平均值，即 $\frac{1}{2}[f(x_0, y_0)+f(x_1, y(x_1))]$来作为近似，就能指望得到改进. 这相当于用梯形法则来近似(5)中的定积分，于是代替(6)而得到

$$y_1=y_0+\frac{h}{2}[f(x_0, y_0)+f(x_1, y(x_1))]. \tag{8}$$

(8)的不便之处是 $y(x_1)$未知. 但若将 $y(x_1)$代以简单欧拉法所求得的近似值 $z_1=y_0+hf(x_0, y_0)$，则(8)便呈宜于利用的形式

$$y_1=y_0+\frac{h}{2}[f(x_0, y_0)+f(x_1, z_1)].$$

更一般地有

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},z_{n+1})], \tag{9}$$

其中

$$z_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n). \tag{10}$$

就我们的试验题(3)而取 $h=0.2$ 为分段长的情形而论，这些公式变成

$$z_{n+1}=y_n+0.2(x_n+y_n)$$

及

$$y_{n+1}=y_n+0.1[(x_n+y_n)+(x_{n+1}+z_{n+1})].$$

开始计算时，取 $n=0$，并利用初始值 $x_0=0.0$ 及 $y_0=1.000$(这次取小数点后三位数字)，写出

$$z_1=1.000+0.2(0.0+1.000)=1.200$$

及

$$y_1=1.000+0.1[(0.0+1.000)+(0.2+1.200)]=1.240.$$

表 2 给出了继续按这一步骤求出的解在点 $x_n=0.2$, 0.4, 0.6, 0.8, 以及 1.0 处的近似值. 结果得 y_1 的近似值是 3.406, 因此用这方法产生的误差约为 1%，那是相当大的改进了.

表 2

x_n	y_n	z_{n+1}	y_{n+1}
0.0	1.000	1.200	1.240
0.2	1.240	1.528	1.577
0.4	1.577	1.973	2.032
0.6	2.032	2.558	2.631
0.8	2.631	3.317	3.406
1.0	3.406		

龙格-库塔法[①] 这方法很有效，能给出准确结果，但无需把 h 取得太

① 龙格(Carl Runge, 1856—1927)，从 1904 到 1925 任哥廷根(Göttingen)大学应用数学教授. 他的著名工作是在塞曼效应(Zeeman effect)方面的研究并对丢番都(Diophantus)方程发现了一个定理，导致其后那个有名的 Thue-Siegel-Roth 定理. 他也教过 Hilbert 滑雪. 库塔(M. W. Kutta, 1867—1944)是另一德国应用数学家，以其在空气动力学中的库塔-茹可夫斯基机翼上升理论方面的贡献留名于世.

小而使计算量过多. 我们不打算推导这个方法而只描述它的用法①. 为从 x_n 及 y_n 求 y_{n+1}, 先依次算出下列四数:

$$m_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$m_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{m_1}{2}\right),$$

$$m_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{m_2}{2}\right),$$

$$m_4 = hf(x_n + h,\ y_n + m_3)$$

然后按下式算 y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \tag{11}$$

这方法的功效可从下列事实看出: 若(5)中的被积函数 $f(x, y)$ 只依赖于 x, 则此法在 $n=0$ 的情形相当于用辛普生法则求那个积分的近似值②.

现在用(11)来求试验题(3)中的 $y(1)$ 的近似值. 取 $h=1$, 因而这只需做一步, 我们有

$$m_1 = 1(0+1) = 1,$$

$$m_2 = 1(0+0.5+1+0.5) = 2,$$

$$m_3 = 1(0+0.5+1+1) = 2.5,$$

$$m_4 = 1(0+1+1+2.5) = 4.5,$$

故

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(1+4+5+4.5) = 3.417.$$

这近似值甚至比改进欧拉法取 $h=0.2$ 时所得的近似值还要好. 表 3 中给出了用龙格-库塔法取 $h=0.2$ 来算试验题所得的结果. 可以看出这里 $y(1)$ 的近似值 3.436 同确切值在小数点后有三位数字是一致的.

---

① 要想知道怎样推导出来的, 可参看 W. Jennings 著《数值方法初阶》("First Course in Numerical Methods", pp. 143—147, Macmillan, New York, 1964).

② 参看 Scarborough 所著书, pp. 357—358

通常讲到这个地方总要说几句关于结合高速数字计算机来应用这些方法的话．但本书作者宁愿听从一位艺术历史学家的话："给人以多于自己所有者，傻瓜一个"。

表 3

x_n	y_n	m_1	m_2	m_3	m_4	y_{n+1}
0.0	1.000	0.200	0.240	0.244	0.289	1.243
0.2	1.243	0.289	0.337	0.342	0.397	1.584
0.4	1.584	0.397	0.456	0.462	0.529	2.044
0.6	2.044	0.529	0.602	0.609	0.691	2.651
0.8	2.651	0.690	0.779	0.788	0.888	3.436
1.0	3.436					

第三章　二阶线性方程

14. 前言

我们在前面几章里学过了为数有限的几类微分方程，它们是可以用熟悉的初等函数解出的．我们所讲的方法需要具有相当的积分技巧，它们的许多有趣应用也饶有实用价值．然而我们不得不遗憾地承认，这部分材料有点儿像一大堆杂技，很少能使读者对微分方程及其解的一般性质有所了解．本章要讲的，是具有丰富及深远理论的一类重要方程．我们将会看到，我们可以根据少数几个简单的原理，使这理论具有统一而令人满意的结构．

一般二阶线性微分方程的形式是

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x),$$

或者，更简单些，

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x). \tag{1}$$

如记号所表明的，$P(x)$，$Q(x)$及$R(x)$应理解为只含x的函数（也许是常数）．不失一般性，y''的系数显然可取为1，因为通过除法总能做到这一点．这类方程在物理上特别是对于在力学上与电路理论上有关振动的问题，具有重大意义．此外（在末后几章中可以看到）纯粹数学中许多深刻与美妙的思想，都是从研究这些方程产生出来的．

一阶线性方程容易用公式求解，这一事实不应使我们产生误会，以为二阶线性方程也可以那样做．一般来说，(1)不能用已知初等函数的显式表出它的解，甚至也不能用积分号来表出它的解．为求它的解，通常需要借助于这类或那类极限步骤，普通用的是无穷级数．在应用上特别重要的许多特殊方程，例如第1节中所提到的勒让特(Legendre)方程和贝塞耳(Bessel)方程，曾被人作过卷帙浩繁的研究；单独这样一个方程的理论也往往是繁复到这种程度，以致它本身即可构成分析的

一整个分支．这些事我们将在第五、第六章中加以讨论．

本章中，对(1)的实际解法的讨论，大部将限于系数 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 为常数的特殊情形．还应强调指出的是，这里所讲的大部分思想与方法，都能立刻推广到高阶线性方程上去，无需改变其中的基本原理，而只不过在周围细节上增加复杂的程度．限于讨论二阶方程，我们就能把问题讲得尽可能简单而不致歪曲主要思想，且仍能具有足够的一般性，使几乎所有数学与物理学上最有重大意义的线性方程都能包括在内．

由于一般情况下不能得出(1)的一个显式解来加以考察，所以我们的第一步工作是要让自己放心这个方程确实具有一个解．下述的存在与唯一性定理是在第十一章中证明的．

定理 A　设 $P(x)$，$Q(x)$ 与 $R(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数①．若 x_0 是 $[a, b]$ 内任一点且若 y_0 与 y_0' 是任何数，则方程(1)在 $[a, b]$ 上有而且只有一个解 $y(x)$，使 $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$．

这样，在所述条件下，我们可任意指定 $y(x)$ 及 $y'(x)$ 在 $[a, b]$ 内任一点 x_0 处的值，而 $[a, b]$ 上则恰好有(1)的一个解，它能在所给点处取所指定的值；或者，用更富于几何意义的话来说，(1)在 $[a, b]$ 上具有唯一的解，它能通过一个指定的点 (x_0, y_0) 且在该处具有指定的斜率 y_0'．在本章其后所作的一般讨论中，我们总假定(不一定需要如此说明)定理 A 中的条件是满足的．

我们把方程(1)中的 $R(x)$ 项同其他各项分开写在等号右边，因为它不含因变量 y 或其任一导数．若 $R(x)$ 恒等于零，(1)就化为齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{2}$$

(齐次一词在这里的传统用法，不应与第 7 节里这个词的同样出于传统

---

① 设 $a<b$ 都是实数，则 $[a, b]$ 表示满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x．它叫闭区间是因它包含端点．将端点除外的区间叫开区间，记为 (a, b)，由不等式 $a<x<b$ 确定．

然而意义完全不同的用法混为一谈.)若 $R(x)$ 不恒等于零，则说(1)是非齐次的. 在研究非齐次方程(1)时,必须同时考察齐次方程(2)(它是由(1)把其中的 $R(x)$ 换成 0 而得出的). 理由是容易知道的. 设我们通过某种方式得知 $y_g(x, c_1, c_2)$ 是(2)的通解（我们料定它会含有两个任意常数，因方程是二阶的)，而 $y_p(x)$ 是(1)的一个固定的特解. 若 $y(x)$ 是(1)的任何一个解,则通过简单的计算可证 $y(x)-y_p(x)$ 是(2)的一个解:

$$\begin{aligned}&(y-y_p)''+P(x)(y-y_p)'+Q(x)(y-y_p)\\&=[y''+P(x)y'+Q(x)y]-[y_p''+P(x)y_p'+Q(x)y_p]\\&=R(x)-R(x)=0.\end{aligned}\tag{3}$$

因 $y_g(x, c_1, c_2)$ 是(2)的通解,故 $y(x)-y_p(x)=y_g(x, c_1, c_2)$,或

$$y(x)=y_g(x, c_1, c_2)+y_p(x),$$

其中 c_1 及 c_2 是适当选取的常数. 这一论述证明了下面的定理:

定理 B 若 y_g 是方程(2)的通解而 y_p 是方程(1)的任一特解,则 y_g+y_p 是(1)的通解.

在第 19 节中我们将看到,若已知 y_g，那就有求出 y_p 的一套成规. 这就说明线性方程理论的中心问题是求解齐次方程的问题. 因此我们的大部分注意力将集中于研究 y_g 的结构,并考察确定其显式的各种方法,但没有任何一种方法是能在任何情形下都行之有效的.

关于齐次方程(2) 我们应该认到的第一件事是：恒等于零的函数 $y(x)$(即对所有 x, $y(x)=0$)总是(2)的一个解. 这解叫平凡解,一般没有什么意义. 关于(2)的解的结构,下述定理给出了基本事实.

定理 C 若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是(2)的任何两个解,则

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\tag{4}$$

也是一个解,其中 c_1 及 c_2 为任何常数.

证明 这个定理可从下列事实立即得出:

$$\begin{aligned}&(c_1y_1+c_2y_2)''+P(x)(c_1y_1+c_2y_2)'+Q(x)(c_1y_1+c_2y_2)\\&=(c_1y_1''+c_2y_2'')+P(x)(c_1y_1'+c_2y_2')+Q(x)(c_1y_1+c_2y_2)\end{aligned}$$

$$=c_1[y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1]+c_2[y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2]$$

$$=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=0, \tag{5}$$

c_1 和 c_2 的系数(方括号里的式子) 之所以等于零，是因为根据假设 y_1 和 y_2 都是(2)的解.

按照初等矢量代数方面的说法，解(4)通常称做解 $y_1(x)$ 与解 $y_2(x)$ 的一个线性组合. 如果用这一术语，便可把定理C中的结果改述为：齐次方程(2)的两个解的任何线性组合也是一个解.

假定我们用某种方法得出了方程(2)的两个解. 那末据这定理就可有含两个任意常数的另一个解，因而它可能是(2)的通解. 但是有一种情况不行：若 y_1 或 y_2 等于另一个的常数倍，比方说，若 $y_1=ky_2$，则

$$c_1y_1+c_2y_2=c_1ky_2+c_2y_2=(c_1k+c_2)y_2=cy_2,$$

因此只有一个必要的常数. 据此，我们有理由指望：在 y_1 和 y_2 都不是另一个的常数倍时，则

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

将是(2)的通解. 这一点将在下节证明.

在这里值得指出，线性方程的大部理论是根据定理B及C中所述的基本性质而来的. 只要看一下(3)和(5)中的运算，就立即会知道这些性质又依赖于微分法运算的线性性质，也就是，依赖于如下的事实：

$$[\alpha f(x)+\beta g(x)]'=\alpha f'(x)+\beta g'(x),$$

其中 α 及 β 是任何常数，$f(x)$ 及 $g(x)$ 是所有可微函数.

习　题

1. 试用观察法求出 $y''=e^x$ 的通解.
2. 求出下列各方程的一个特解：
   a. $x^3y''+x^2y'+xy=1$；
   b. $y''-2y'=6$；
   c. $y''-2y=\sin x$.
3. 通过消去常数 c_1 及 c_2，求下列各曲线族的微分方程：
   a. $y=c_1x+c_2x^2$；

b. $y=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$;

c. $y=c_1\sin kx+c_2\cos kx$.

4. 验证：在不含零的任何区间$[a,b]$上，$y=c_1x^{-1}+c_2x^5$是

$$x^2y''-3xy'-5y=0$$

的一个解．若$x_0\neq0$而y_0与y_0'是任意二数，试证能以唯一方式选定c_1及c_2，使$y(x_0)=y_0$及$y'(x_0)=y_0'$.

5. 试证$y=x^2\sin x$和$y=0$都是

$$x^2y''-4xy'+(x^2+6)y=0$$

的解，并且它们都满足条件$y(0)=0$及$y'(0)=0$．这是否与定理A矛盾？如果不矛盾，为什么不矛盾？

6. 若方程(2)在区间$[a,b]$上的一个解与x轴切于该区间内任一点处，则此解必恒等于零．何故？

7. 若$y_1(x)$及$y_2(x)$是方程(2)在一区间$[a,b]$上的两个解，并在该区间内有一公共零值点，试证其中一个解为另一个的常数倍．[一点x_0叫做函数$f(x)$的**零值点**，如果有$f(x_0)=0$.]

15. 齐次方程的通解

若二函数$f(x)$和$g(x)$定义在区间$[a,b]$上，且其中之一是另一个的常数倍，则说它们在区间$[a,b]$上是**线性相关的**．否则的话——即任何一个都不是另一个的常数倍，则说它们是**线性无关的**．值得指出的是：若$f(x)$恒等于零，则对于每个函数$g(x)$，$f(x)$和$g(x)$总是线性相关的，因为$f(x)=0\cdot g(x)$.

本节目的是要证明下述定理．

定理A. 设$y_1(x)$及$y_2(x)$是齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

在区间$[a,b]$上线性无关的解，则

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{2}$$

是方程(1)在$[a,b]$上的通解，意即(1)在此区间上的每一个解可由(2)中选取适当的任意常数c_1与c_2而得出．

证明分几步来做，先证几个引理和讲明一些辅助概念．

设 $y(x)$是(1)在$[a, b]$上的任一个解. 我们必须证明: 可找出这样的常数 c_1 及 c_2,使对$[a,b]$内的所有 x 下式成立:

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x).$$

据定理 14-A,(1)在整个$[a,b]$上的一个解, 可由该解及其导数在单独一点处的值完全确定. 因此, 由于 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$及$y(x)$都是(1)在$[a, b]$上的解, 那就只要证明: 对于$[a, b]$中的某点 x_0,能找到 c_1 及 c_2,使

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y(x_0)$$

及

$$c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=y'(x_0),$$

为使这个方程组能解出 c_1 及c_2,就只要行列式

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_2(x_0)y_1'(x_0)$$

的值异于零. 这就促使我们来考察由

$$W(y_1, y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'$$

所定义的 x 的函数,它叫 y_1 和 y_2 的朗氏式 (Wronskian)①, 而特别要注意它会不会在 x_0 处等于零. 下述第一个引理证明了点 x_0 的位置无关重要,从而简化了这一问题.

引理 1 若 $y_1(x)$与 $y_2(x)$是方程(1)在$[a,b]$上的任何两个解, 则其朗氏式 $W=W(y_1, y_2)$ 在 $[a, b]$ 上或者恒等于零,或者决不会等于零.

证明 我们先指出

$$\begin{aligned} W' &= y_1y_2''+y_1'y_2'-y_2y_1''-y_2'y_1' \\ &= y_1y_2''-y_2y_1''. \end{aligned}$$

其次,由于 y_1 及 y_2 都是(1)的解,故有

---

① 朗斯基(Hoëné Wronski, 1778—1853)是个性格古怪的穷苦波兰人, 其大部生涯在法国渡过. 上述朗斯基行列式(简称朗氏式)是他在数学上的唯一贡献. 他是十九世纪中唯一留名后世的波兰数学家, 这便有点使人感到奇怪, 因为二十世纪波兰涌现出了许多杰出的数学家.

$$y_1''+Py_1'+Qy_1=0$$

及

$$y_2''+Py_2'+Qy_2=0.$$

以 y_2 乘第一式，以 y_1 乘第二式，并从后者减去前者，得到

$$(y_1y_2''-y_2y_1'')+P(y_1y_2'-y_2y_1')=0$$

或

$$\frac{dW}{dx}+PW=0.$$

这个一阶方程的通解是

$$W=ce^{-\int P dx},$$

而由于指数函数因子决不会等于零，证明就完成了.

这个结果就使我们把证明定理的整个工作归结为：求证(1)的任何两个线性无关解的朗氏式不会恒等于零．我们在下一个引理中证明这事，它所证的实际比我们所需要的还要多.

引理 2　若 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 是方程(1)在$[a, b]$上的两个解，则它们在该区间上线性相关的充分必要条件是它们的朗氏式 $W(y_1, y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'$ 在该区间上恒等于零.

证明　先假定 y_1 及 y_2 是线性相关的，由此来证明能得出

$$y_1y_2'-y_2y_1'=0.$$

第一，若二者之一在$[a, b]$上恒等于零，则结论是无疑的．因此可不失一般性地假定它们都不恒等于零，则由此以及由它们的线性相关性，可知每一个解必是另一个的常数倍．于是得 $y_2=cy_1$，而 c 为某一常数，因而有 $y_2'=cy_1'$．从这两式消去 c，得到 $y_1y_2'-y_2y_1'=0$，这就证明了引理的一半.

现假定朗氏式恒等于零而来证明线性相关．若 y_1 在$[a, b]$上恒等于零，则（如本节开头所指出的）两函数线性相关．故可假定 y_1 在$[a, b]$上不恒等于零，由此根据连续性可知 y_1 在$[a, b]$的某个子区间$[c, d]$上根本不会等于零．由于朗氏式在$[a, b]$上恒等于零，故可除以

y_1^2而知在$[c,d]$上有

$$\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}=0.$$

这可写成 $(y_2/y_1)'=0$ 的形式，积分后得 $y_2/y_1=k$ 即 $y_2(x)=ky_1(x)$对$[c,d]$中的一切x成立，这里k是某个常数．最后，由于$y_2(x)$及$ky_1(x)$在$[c,d]$上具有等值，它们也有相等的导数；于是据定理 14-A 可推出对$[a,b]$上的所有x都有

$$y_2(x)=ky_1(x),$$

这就结束了我们的证明．

有了这个引理，定理A的证明便完成了．

要证(1)的两个解在一区间上是线性无关的，最简单的办法一般是证明它们的比在该区间上不等于常数，而在大多数情形下这是容易由观察确定的．但有时用引理 2 中所述的正式检验法也是方便的：算出朗氏式并证明它不等于零．下面举例说明这两种方法．

例 1 试证 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ 是 $y''+y=0$ 在任何区间上的通解，并求适合 $y(0)=2$ 及 $y'(0)=3$ 的特解．

$y_1=\sin x$ 及 $y_2=\cos x$ 都是解，这一事实可由直接代入验证．它们在任何区间$[a,b]$上的线性无关则由 $y_1/y_2=\tan x$并非常数而知，也可从它们的朗氏式决不会等于零而知：

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-\sin^2x-\cos^2x=-1.$$

因$P(x)=0$ 及 $Q(x)=1$ 在$[a,b]$上连续，故据定理A知

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x$$

是所给方程在$[a,b]$上的通解．又因区间$[a,b]$可无限扩大而不致碰到使$P(x)$或$Q(x)$出现不连续性的点，所以这一通解对所有x都成立．为求所需特解，我们解方程组

$$c_1\sin 0+c_2\cos 0=2,$$

$$c_1\cos 0-c_2\sin 0=3.$$

由此得 $c_2=2$, $c_1=3$, 故 $y=3\sin x+2\cos x$ 是满足所给条件的特解.

线性相关及线性无关这些概念在许多地方都重要而不仅限于在这里. 读者也许早就知道, 线性代数这一重要数学分支, 从本质上说也无非是对这些概念的抽象处理再加上许多应用而已.

习　题

在题 1—4 中, 试用朗氏式确定线性无关.

1. 试证 e^x 及 e^{-x} 是 $y''-y=0$ 在任何区间上线性无关的解.

2. 试证 $y=c_1x+c_2x^2$ 是

$$x^2y''-2xy'+2y=0$$

在不含 0 的任何区间上的通解, 并求适合 $y(1)=3$ 及 $y'(1)=5$ 的特解.

3. 试证 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$ 是

$$y''-3y'+2y=0$$

在任何区间上的通解, 并求适合 $y(0)=-1$ 及 $y'(0)=1$ 的特解.

4. 试证 $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$ 是

$$y''-4y'+4y=0$$

在任何区间上的通解.

5. 考察区间 $[-1, 1]$ 上的两个函数 $f(x)=x^3$, 及 $g(x)=x^2|x|$.

   a. 试证它们的朗氏式 $W(f,g)$ 恒等于零.

   b. 试证 f 与 g 并非线性相关.

   c. 问 (a) 及 (b) 是否与引理 2 矛盾? 若不, 为什么不矛盾?

6. $\sin x$, $\cos x$ 以及 $\sin x$, $\sin x-\cos x$ 显然是 $y''+y=0$ 的不同的两对线性无关解. 因此, 若 y_1 及 y_2 是齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

的线性无关解, 可知 y_1 及 y_2 不是由方程唯一确定了的.

   a. 试证

$$P(x)=-\frac{y_1y_2''-y_2y_1''}{W(y_1,\ y_2)}$$

及

$$Q(x)=\frac{y_1'y_2''-y_2'y_1''}{W(y_1,\ y_2)},$$

   故方程是由任何两个所给线性无关的解唯一确定的.

   b. 应用 (a) 试从上述两对线性无关解得出它们所满足的微分方程 $y''+y=0$.

   c. 试利用 (a) 从一对线性无关解 e^{2x} 及 xe^{2x} 重新作出题 4 中的微分方程.

16. 利用一个已知解求出别的解.

我们知道，若已知齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

的两个线性无关解 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$，它的通解就容易写出. 但怎样才能得出 y_1 和 y_2 呢？很遗憾，要做到这一点并没有什么通用的方法. 不过，若 y_1 已知，则确实有一种标准方法可用来确定 y_2. 这一点是相当重要的，因为在许多情形下可凭观察或其他某种方法得出(1)的一个解.

为推出这套方法，先假定 $y_1(x)$ 是(1)的一个已知的非零解，因而 $cy_1(x)$ (c 为任何常数) 也是一个解. 这个方法的基本思想是把常数 c 换成一个未知函数 $v(x)$，然后设法确定 v，以使 $y_2=vy_1$ 是(1)的一个解. 开头我们根本不敢事先担保这样做是否能行，但结果确实可行. 要想知道我们怎么能够想起这样来试，就得回想以前所说的事：两个解 y_1 及 y_2 若为线性无关，则要求它们的比 y_2/y_1 必为 x 的不等于常数的函数，比方说是 v；于是若能找到 v，则由于已知 y_1，那就能得出 y_2，问题就解决了.

于是就设 $y_2=vy_1$ 是(1)的一个解，因此

$$y_2''+Py_2'+Qy_2=0, \tag{2}$$

我们来想法找出未知函数 $v(x)$. 将 $y_2=vy_1$ 及

$$y_2'=vy_1'+v'y_1 \text{ 与 } y_2''=vy_1''+2v'y_1'+v''y_1$$

代入(2)并整理各项，得到

$$v(y_1''+Py_1'+Qy_1)+v''y_1+v'(2y_1'+Py_1)=0.$$

由于 y_1 是(1)的一个解，上式简化为

$$v''y_1+v'(2y_1'+Py_1)=0$$

或

$$\frac{v''}{v'}=-2\frac{y_1'}{y_1}-P.$$

积分一次后得到

$$\log v' = -2\log y_1 - \int P dx,$$

故

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx}$$

于是

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx. \tag{3}$$

这以后就只要证明 y_1 及 $y_2 = v y_1$（其中 v 由 (3) 给出）确实是线性无关的；这事我们留待读者自己在习题 1 中去证明.

例 1 $y_1 = x$ 是 $x^2 y'' + x y' - y = 0$ 的一个解（它非常简单，足以用观察法得出）．求其通解．

先把所给方程写成(1)的形式：

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0.$$

因 $P(x) = \frac{1}{x}$，第二个解是 $y_2 = v y_1$，其中

$$v = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-\log x} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2}.$$

由此得出 $y_2 = (-1/2) x^{-1}$，故通解为

$$y = c_1 x + c_2 x^{-1}.$$

习　题

1. 若 y_1 是方程(1)的一个非零解，按书中所讲方法求得的第二个解为 $y_2 = v y_1$，其中 v 是由公式(3)给出的，试通过计算朗氏式求证 y_1 及 y_2 是线性无关的．
2. 试用本节所讲方法从所给出的解 y_1 求下列各方程的通解：
   a. $y'' + y = 0$, $y_1 = \sin x$;
   b. $y'' - y = 0$, $y_1 = e^x$.
3. 方程 $x y'' + 3 y' = 0$ 显然有一个解 $y_1 = 1$，求通解．
4. 验证 $y_1 = x^2$ 是 $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$ 的一个解并求通解．

5. 方程$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$是勒让特方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0$$

相应于$p=1$的特例. 它有一个明显的解$y_1=x$, 求通解.

6. 方程$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$是贝塞耳方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

相应于$p=\frac{1}{2}$的特例. 试验证$y_1=x^{-\frac{1}{2}}\sin x$是只含$x$正值的任何区间上的一个解, 并求通解.

7. 利用下列各方程都以$y_1=x$为一明显解这一事实, 求其通解:

a. $y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=0$;

b. $x^2y''+2xy'-2y=0$.

8. 求$y''-xf(x)y'+f(x)y=0$的通解.

9. 验证$xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$的一个解是$y_1=e^x$并求通解.

10. 求$y''-f(x)y'+[f(x)-1]y=0$的通解.

17. 常系数齐次方程

现在我们有条件来对齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$在$P(x)$及$Q(x)$为常数p及q时的特例

$$y''+py'+qy=0 \tag{1}$$

作完整的讨论. 我们的出发点是根据这一事实: 指数函数e^{mx}具有各阶导数都等于函数本身常数倍这一特性. 这就使我们想起, 若适当选取常数m, 则

$$y=e^{mx} \tag{2}$$

可能是(1)的一个解. 因$y'=me^{mx}$, $y''=m^2e^{mx}$, 代入(1)得到

$$(m^2+pm+q)e^{mx}=0; \tag{3}$$

因e^{mx}决不会等于零, 故(3)成立, 当且仅当m满足**辅助方程**

$$m^2+pm+q=0. \tag{4}$$

这个方程的两个根m_1及m_2(也就是能使(2)作为(1)的一个解时的m值), 由二次方程的公式给出:

$$m_1, m_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{5}$$

对于这种情况的进一步处理，需要就(5)所固有的三种可能情形分别加以讨论.

不同实根　显然，m_1 及 m_2 是不同的实根，当且仅当 $p^2-4q>0$. 这时我们得到两个解

$$e^{m_1 x} \text{ 及 } e^{m_2 x}.$$

由于比

$$\frac{e^{m_1 x}}{e^{m_2 x}} = e^{(m_1 - m_2)x}$$

不是常数，这两个解是线性无关的，故(1)的通解是

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \tag{6}$$

不同的复根[①]　m_1 及 m_2 为不同的复根，当且仅当 $p^2-4q<0$. 这时 m_1 及 m_2 可写成 $a \pm ib$，由欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{7}$$

可把(1)的两个解写成

$$e^{m_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) \tag{8}$$

及

$$e^{m_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax}e^{-ibx} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx). \tag{9}$$

因我们所要的只是实值函数的解，故可将(8)与(9)相加并除以 2，又将其相减并除以 $2i$，得到

$$e^{ax}\cos bx \text{ 及 } e^{ax}\sin bx. \tag{10}$$

这两个解是线性无关的，故此时(1)的通解是

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx). \tag{11}$$

我们也可以从另一观点来看待这一事实. 一个复值函数

$$w(x) = u(x) + iv(x)$$

---

① 我们假定读者已熟悉复数的初等代数. 欧拉公式(7)是（或者应该是）任何一本像样的微积分教科书中应该有的标准内容.

满足方程(1)(其中 p 及 q 为实数)，当且仅当 $u(x)$ 及 $v(x)$ 分别满足(1). 因此,(1)的一个复值解总含有两个实解，这就立即能从(8)得出两个解(10).

相等的实根 显然,m_1 及m_2 为相等的实根，当且仅当 $p^2-4q=0$. 这里我们只得出一个解 $y=e^{mx}$，其中$m=-\frac{p}{2}$. 但我们容易用上节的方法求出第二个线性无关的解：若取 $y_1=e^{(-p/2)x}$,则

$$v=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p dx}\,dx=\int\frac{1}{e^{-px}}e^{-px}\,dx=x,$$

于是 $y_2=vy_1=xe^{mx}$. 这时(1)的通解是

$$y=c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}. \tag{12}$$

总之，常系数齐次方程(1)的通解，按其辅助方程(4)的根 m_1 及m_2的性质,可以有三种不同的形式，分别用公式(6),(11)及(12)给出. 很明显,这个通解在定性方面的本质,完全由系数 p 及 q 的正负及相对大小确定,并能因改变其数值而根本改观. 对于物理学家来说,如果他要对(1)这类方程所描述的机械系统或电路作详尽分析,这一事实是很重要的. 例如，若 $p^2<4q$，则解的图形是波状线，其振幅则按 p 为负或为正而依指数函数的规律增加或减小. 这类知识是从上述讨论得出的明显结果，并在关于微分方程的初等物理的应用这类书中有详尽的论述.

本节的思想主要来自欧拉. 附录A中将对这位伟大科学天才的许多成就,择要作一些简短的介绍.

习 题

1. 求下列各方程的通解:

   a. $y''+y'-6y=0$;
   b. $y''+2y'+y=0$;
   c. $y''+8y=0$;
   d. $2y''-4y'+8y=0$;
   e. $y''-4y'+4y=0$;
   f. $y''-9y'+20y=0$;
   g. $2y''+2y'+3y=0$.

2. 试证,方程(1)的通解当 $x\to\infty$ 时趋于 0,当且仅当 p 及 q 都是正数.

3. 不用本节中的公式，试证方程(1)的任何一个解的导数也是一个解.

4. 方程

$$x^2y''+pxy'+qy=0$$

(其中 p 及 q 是常数)叫欧拉等量纲方程①. 试证若令 $x=e^z$ 置换自变量，它就变成一个常系数方程，并试用此法求下列各方程的通解：

a. $x^2y''+3xy'+10y=0$；

b. $2x^2y''+10xy'+8y=0$；

c. $x^2y''+2xy'-12y=0$.

5. 在题 4 中，对于有些变系数齐次方程，可把自变量从 x 变到 $z=\log x$ 而把它化成常系数方程. 现考察一般齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0, \tag{*}$$

并把自变量从 x 变成 $z=z(x)$，其中 $z(x)$ 是 x 的未确定函数. 试证方程(*)可用此法化成一个常系数方程，当且仅当 $(Q'+2PQ)/Q^{3/2}$ 是常数，此时用置换 $z=\int\sqrt{Q(x)}dx$ 能获得所需结果.

18. 待定系数法

在以上两节中，我们考察了求齐次微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

的通解的几种方法. 我们知道，这些方法只对少数一些特殊情形是有效的：例如系数 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 为常数的情形，以及它们虽不是常数但仍足够简单使我们能用观察法发现一个非零解的情形. 幸运的是，这些类方程的范围还足够宽广，能包含相当一些有趣的应用问题. 不过应该清楚认识到，在数学和物理学上很重要的许多齐次方程，用这些方法是对付不了的，而只能用第五章中所讲的幂级数方法求解.

在本节及下节中，我们要对非齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) \tag{2}$$

在其相应齐次方程(1)的通解 $y_g(x)$ 为已知的那些情形，加以讨论. 据

① 也叫柯西(Cauchy)等量纲方程. 由于欧拉的研究范围太广，为了避免混淆不清，许多数学家在给方程、公式、定理等等定名时，常以继欧拉之后第一个研究者的姓氏命名.

定理14-B，若 $y_p(x)$ 是(2)的任一特解，则

$$y(x)=y_g(x)+y_p(x)$$

是(2)的通解. 但 y_p 怎样找呢？这是我们现在要考虑的一个实际问题.

待定系数法是在(2)的形式为

$$y''+py'+qy=R(x) \tag{3}$$

(其中 p,q 是常数，$R(x)$ 是指数函数、正弦或余弦函数，多项式，或这些函数的某种组合)时求其 y_p 的一种方法. 例如，我们来研究方程

$$y''+py'+qy=e^{ax}. \tag{4}$$

由于像 e^{ax} 那样一个指数函数微分后仍是指数函数，只是其系数可能有所改变，因此自然会猜想

$$y_p=Ae^{ax} \tag{5}$$

可能是(4)的一个特解. 这里 A 是待定系数，我们要这样来确定它，使(5)能确实满足(4). 将(5)代入(4)，得

$$A(a^2+pa+q)e^{ax}=e^{ax},$$

故

$$A=\frac{1}{a^2+pa+q}, \tag{6}$$

除非(6)右边的分母等于零，这个 A 值就能使(5)成为(4)的一个解. 这一点困难是易于理解的，因为例外的情形出现在 a 是辅助方程

$$m^2+pm+q=0 \tag{7}$$

的一个根时，而在这种情况下(5)将使(4)的左边化为 0，从而就不可能满足(4)，因为它的右边异于 0.

在这种例外情形下怎样继续用这个方法做下去呢？我们在上节中看到，当辅助方程有重根时，齐次方程的第二个线性无关解是乘上 x 之后得出的. 在这一事实的启发之下，我们试取

$$y_p(x)=Axe^{ax} \tag{8}$$

作为一个代用解. 将(8)代入(4)后得到

$$A(a^2+pa+q)xe^{ax}+A(2a+p)e^{ax}=e^{ax}.$$

头一个括弧里的式子是 0, 因据假设 a 是(7)的一个根, 故

$$A=\frac{1}{2a+p}. \tag{9}$$

除非 $a=-p/2$, 也就是除非 a 是(7)的一个重根, (9)便给出了(8)的一个切实可靠的系数. 而在新的例外情形下, 我们希望继续照以前那种成功的经验去做, 并试设

$$y_p=Ax^2e^{ax}. \tag{10}$$

把(10)代入(4), 得

$$A(a^2+pa+q)x^2e^{ax}+2A(2a+p)xe^{ax}+2Ae^{ax}=e^{ax}.$$

因这时假定 a 是(7)的一个重根, 两个括弧里的式子都等于 0, 故有

$$A=\frac{1}{2}. \tag{11}$$

总起来说: 若 a 不是辅助方程(7)的一个根, 则(4)有形式为 Ae^{ax} 的一个特解; 若 a 是(7)的一个单根, 则(4)没有 Ae^{ax} 这种形式的解, 然而它有 Axe^{ax} 这种形式的解; 若 a 是个重根, 则(4)无 Axe^{ax} 这种形式的解, 然而有 Ax^2e^{ax} 形式的解. 在每种情形下我们都推出了 A 的一个公式, 其目的只是为说明事实背后的原因. 在实际算的时候, 直接代入所处理的方程反而更容易求 A.

可以应用待定系数法的另一重要情形是(4)的右边换成 $\sin bx$ 时的情形:

$$y''+py'+qy=\sin bx. \tag{12}$$

因 $\sin bx$ 的各阶导数是 $\sin bx$ 和 $\cos bx$ 的常数倍, 故可取试用解的形式为

$$y_p=A\sin bx+B\cos bx. \tag{13}$$

现在只要把(13)代入(12), 并使等号两边 $\sin bx$ 项和 $\cos bx$ 项的系数分别相等, 便可算出待定系数 A 及 B. 如果方程(12)的右边换成 $\cos bx$ 或者 $\sin bx$ 与 $\cos bx$ 的任何线性组合(即形如 $\alpha\sin bx+\beta\cos bx$ 的任何函数), 这些步骤仍然可行. 同以前一样, 这个方法在(13)满足相应

于(12)的齐次方程时就行不通．当出现这种情形的时候，那就不用(13)而用

$$y_p = x(A\sin bx + B\cos bx) \tag{14}$$

作为一个解来试，并继续照这方法做．

最后，我们来看方程(4)右边是多项式的情形：

$$y'' + py' + qy = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n. \tag{15}$$

由于多项式的导数仍然是多项式，这就促使我们想去找一个下列形式的特解

$$y_p = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n. \tag{16}$$

当把(16)代入(15)之后，那就只要使两边 x 同次幂的系数相等，便可求出待定系数 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 的值．若碰巧常数 q 等于 0，那末照这一步骤做的结果将使(15)左边 x 的最高次项是 x^{n-1}，因而这时该取试验解的形式为

$$\begin{aligned} y_p &= x(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n) \\ &= A_0x + A_1x^2 + \cdots + A_nx^{x+1}. \end{aligned} \tag{17}$$

若 p 及 q 都是 0，则(15)可以直接用积分法求解．

上述讨论说明方程(3)的一个特解的形式常可从右边 $R(x)$ 的形式推出．每当 $R(x)$ 的各阶导数只具有为数有限的几种基本不同形式时，就都能这样做．上面已经看到这在指数函数、正弦及余弦以及多项式的情形下是怎样做的．在下面的习题 3 里我们指出在 $R(x)$ 是这类函数之和时是怎样做的．如果 $R(x)$ 是这类函数的多种乘积，对于这种情形也可以搞出一些稍微复杂的方法来加以处理，但对大多数实际工作来说这是不必要的．从本质上讲，整个工作只不过是作一种巧妙的猜测，其中包含足够多的待定系数供人调配，以适合情况需要．

习　题

1. 求下列各方程的通解：

   a. $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$；

b. $y''+4y=3\sin x$;

c. $y''+10y'+25y=14e^{-5x}$;

d. $y''-2y'+5y=25x^2+12$;

e. $y''-y'-6y=20e^{-2x}$;

f. $y''-3y'+2y=14\sin 2x-18\cos 2x$;

g. $y''+y=2\cos x$;

h. $y''-2y'=12x-10$.

2. 若 k 及 b 为正的常数, 求下列方程的通解:

$$y''+k^2y=\sin bx.$$

3. 若 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 分别是

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R_1(x)$$

及

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R_2(x)$$

的解, 试证 $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$ 是

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R_1(x)+R_2(x)$$

的一个解. 试应用这原理, 求下列方程的通解:

$$y''+4y=4\cos 2x+6\cos x+8x^2-4x.$$

19. 变动参数法

第 18 节中所讲求非齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) \tag{1}$$

一个特解的方法有两方面的严重局限性: 它只能用于系数 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 为常数的情形, 而且即使在那种情形下也只有当右边的 $R(x)$ 形式特别简单时才行. 但在这些限度内, 这方法通常是最易于施行的.

现要讲一种总能行得通的更有效的方法(不管 P, Q 及 R 的性质如何), 只要其相应齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{2}$$

的通解已知即可. 因此我们假定已用某种方法得出了(2)的通解

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x). \tag{3}$$

这种方法同第 16 节里讨论过的一样; 这就是把常数 c_1 及 c_2 换成未知函数 $v_1(x)$ 及 $v_2(x)$, 并设法确定 v_1 及 v_2, 以使

$$y=v_1y_1+v_2y_2 \tag{4}$$

是(1)的一个解①. 因需求出两个未知函数, 这就必须有包含这两个函数的两个方程. 由于要求(4)应是(1)的一个解, 这就得出一个方程. 至于第二个方程怎么样那是马上可以清楚的. 我们先算(4)的导数, 列出式子如下:

$$y'=(v_1y_1'+v_2y_2')+(v_1'y_1+v_2'y_2). \tag{5}$$

如再微分一次, 那就会出现未知函数 v_1 及 v_2 的二阶导数. 为避免增加问题的复杂性, 我们让第二个括弧里的式子等于 0:

$$v_1'y_1+v_2'y_2=0. \tag{6}$$

这就得到

$$y'=v_1y_1'+v_2y_2', \tag{7}$$

于是

$$y''=v_1y_1''+v_1'y_1'+v_2y_2''+v_2'y_2'. \tag{8}$$

把(4), (7), (8)代入(1), 整理各项, 得到

$$v_1(y_1''+Py_1'+Qy_1)+v_2(y_2''+Py_2'+Qy_2)$$
$$+v_1'y_1'+v_2'y_2'=R(x). \tag{9}$$

因 y_1 及 y_2 是(2)的解, 两个括弧里的式子都等于 0, 于是(9)缩简为

$$v_1'y_1'+v_2'y_2'=R(x). \tag{10}$$

把(6)与(10)结合一起, 便得含两个未知函数 v_1' 及 v_2' 的两个方程:

$$v_1'y_1+v_2'y_2=0$$
$$v_1'y_1'+v_2'y_2'=R(x).$$

它们可以立即求解, 得出

$$v_1'=\frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)} \quad 及 \quad v_2'=\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}. \tag{11}$$

应该指出, 这两个公式是完全合法的, 因 y_1 及y_2 为线性无关从而分母中的朗氏式不等于 0. 这就只要再把(11)式积分便可求得 v_1 及 v_2:

---

① 这是变动常数法这名称的来源: 我们变动常数 c_1 及 c_2.

$$v_1=\int\frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx \quad 及 \quad v_2=\int\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx. \tag{12}$$

现在可以把所有结果合起来，得到所求(1)的特解为

$$y=y_1\int\frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx+y_2\int\frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx. \tag{13}$$

读者会看出这方法有其缺点．特别是(12)中的积分可能难算或者不能算出．此外，甚至在开始做之前还必须知道(2)的通解；不过这个反对意见实际上是无足轻重的，因为除非已经有了(2)的通解，我们是不太可能会想到要去求(1)的特解的．

例1 试求 $y''+y=\cos x$ 的一个特解．

相应齐次方程 $y''+y=0$ 以 $y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x$ 为其通解，故有 $y_1=\sin x, y_1'=\cos x, y_2=\cos x, y_2'=-\sin x$. y_1 及 y_2 的朗氏式是

$$W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'=-\sin^2x-\cos^2x=-1,$$

故由(12)得到

$$v_1=\int\frac{-\cos x\csc x}{-1}dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\log(\sin x)$$

及

$$v_2=\int\frac{\sin x\csc x}{-1}dx=-x.$$

于是所需特解是

$$y=\sin x\log(\sin x)-x\cos x.$$

习　题

1. 先用观察法然后再用变动参数法，求

$$y''-2y'+y=2x$$

的一个特解．

2. 先用待定系数法然后用变动参数法，求

$$y''-y'-6y=e^{-x}$$

b. $y''+2y'+y=e^{-x}\log x$;

c. $y''-2y'-3y=64xe^{-x}$;

d. $y''+2y'+5y=e^{-x}\sec 2x$.

4. 求下列各方程的通解:

a. $(x^2-1)y''-2xy'+2y=(x^2-1)^2$;

b. $(x^2+x)y''+(2-x^2)y'-(2+x)y=x(x+1)^2$.

20. 机械系统的振动

一般来说，每当一个处于稳定平衡状态的物理系统受干扰时就产生振动，因那时它受到一个趋于恢复平衡的力．本节中可以看到这类情况能导出

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx=R(t)$$

这形式的微分方程，而对这些方程的研究又怎样能使我们对物理环境有更好的了解．

无阻尼的简谐振动 再举一个例子，我们来考察质量为m的一个车厢通过一个弹簧连在附近的墙上(图 20)．当车厢在平衡位置$x=0$处，弹簧对它不施力．若车厢被拉开距离x，则弹簧施加一个恢复力$F_s=-kx$，这里k是个正的常数，它的数值表明弹簧强度的大小．据牛顿第二运动定律，车厢质量m乘以其加速度等于其所受总力，于是得到

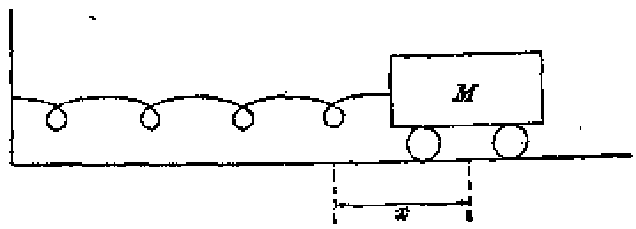


图 20

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=F_s \tag{1}$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{M}x=0. \tag{2}$$

为方便起见，可把这运动方程写作

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=0, \tag{3}$$

其中 $a=\sqrt{k/M}$，这就立即能写出它的通解

$$x=c_1\sin at+c_2\cos at. \tag{4}$$

若把车厢拉到 $x=x_0$ 处，并在 $t=0$ 时不给予任何初始速度而将其放开，这时初始条件是

$$当 t=0 时 x=x_0 及 v=\frac{dx}{dt}=0, \tag{5}$$

则易知 $c_1=0$ 及 $c_2=x_0$，故(4)变为

$$x=x_0\cos at. \tag{6}$$

(6)的曲线如图 21 所示. 这个简谐振动的振幅是 x_0；又因它的周期 T 是经历整个一周运动所需的时间，故 $aT=2\pi$，于是

$$T=\frac{2\pi}{a}=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}. \tag{7}$$

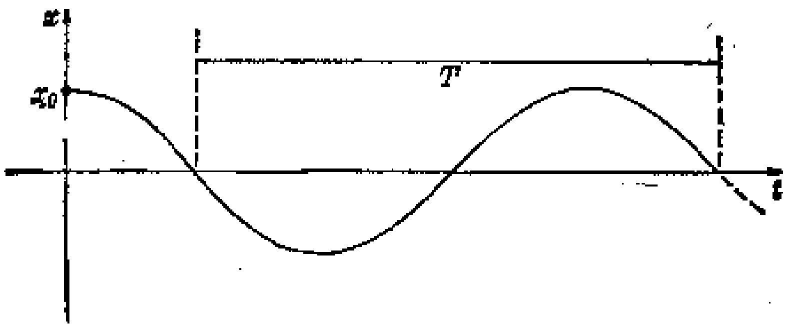


图 21

它的频率 f 是单位时间的周数，故 $fT=1$，因此

$$f=\frac{1}{T}=\frac{a}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}. \tag{8}$$

由(8)显然可见：若弹簧强度增加或车质量减小，则振动频率增大，这同我们的常识所预料的一致.

阻尼振动 处理这个物理问题的第二步，是把阻尼力 F_d 的影响再考虑进去，这是车所通过的媒质(空气、水、油等等)的粘滞作用所引起的. 我们明确假定这个力是反抗运动的，其数值正比于速度，也就是设

$$F_d = -c\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

这里 c 是个正的常数，表示媒质阻力的大小．这时方程(1)变为

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d \tag{9}$$

故

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{M}x = 0. \tag{10}$$

为方便计，仍把它改写一下：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0, \tag{11}$$

这里 $b = c/2M$，$a = \sqrt{k/M}$．辅助方程是

$$m^2 + 2bm + a^2 = 0. \tag{12}$$

它的根 m_1 及 m_2 是

$$m_1,\ m_2 = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}. \tag{13}$$

(11)的通解当然要由数 m_1 及 m_2 的性质确定．我们知道这里有三种情形，现分别讨论如下．

情形 A $b^2 - a^2 > 0$ 或 $b > a$．粗略说来，这相当于假定滞性所致的摩擦力大于弹簧强度．由此推知 m_1 及 m_2 是不同的负数，而(11)的通解是

$$x = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}. \tag{14}$$

若用初始条件(5)算出 c_1 及 c_2，(14)就变成

$$x = \frac{x_0}{m_1 - m_2}(m_1e^{m_2t} - m_2e^{m_1t}). \tag{15}$$

这个函数的曲线如图 22 所示．显然这时不产生振动，车只是缓缓回到平衡位置．这类运动叫超衰减的．现在设想滞性减小到下面的那种情形．

情形 B $b^2 - a^2 = 0$ 或 $b = a$．这时有 $m_1 = m_2 = -b = -a$，(11) 的通解是

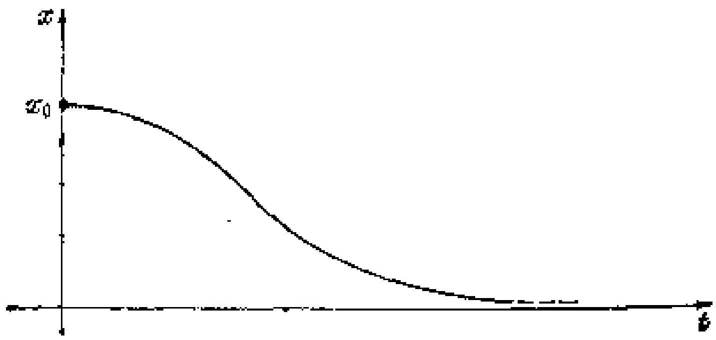


图　22

$$x = c_1 e^{-at} + c_2 t e^{-at}. \tag{16}$$

加上初始条件(5)后，得到

$$x = x_0 e^{-at}(1 + at). \tag{17}$$

这个函数的图形同(15)的图形差不多，这时仍然没有振动．这一类运动叫临界衰减的．现在如果滞性再减小，不管只减了多么小的一点点，运动就变成振动的，叫做次衰减的．这种情形才是真正有意义的，下面就来讨论它．

情形 C　$b^2 - a^2 < 0$ 或 $b < a$．这时 m_1 及 m_2 是共轭复数 $-b \pm i\alpha$，其中

$$\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

于是(11)的通解是

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t). \tag{18}$$

用初始条件(5)算出 c_1 及 c_2 后，上式变为

$$x = \frac{x_0}{\alpha} e^{-bt}(\alpha \cos \alpha t + b \sin \alpha t). \tag{19}$$

若引入 $\theta = \tan^{-1}(b/\alpha)$，便可把(19)写成更能说明问题的形式

$$x = \frac{x_0 \sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha} e^{-bt} \cos(\alpha t - \theta). \tag{20}$$

这个函数是振荡性的，其振幅按指数函数式减弱，如图 23 所示．它并不是严格意义下的周期函数，但它的曲线相隔一定距离穿过平衡位置 $x = 0$，若把它的“周期” T 看作是运动一整“周”所需的时间，则 $\alpha T = 2\pi$，于是

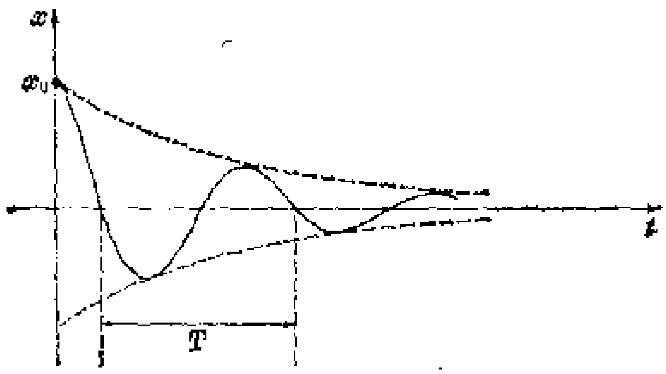


图 23

$$T=\frac{2\pi}{\alpha}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{k/M-c^2/4M^2}}. \tag{21}$$

此外，它的"频率" f 是

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{a^2-b^2}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}-\frac{c^2}{4M^2}}. \tag{22}$$

这个数通常叫系统的自然频率. 当滞力为零从而 $c=0$, 则(21)及(22)显然就变为(7)及(8). 而且，比较(8)与(22)，则见振动频率因存在阻尼而减小，同预想的一致.

强迫振动 上面所讨论的振动叫自由振动，因为作用于系统上的力都是系统的内力. 现在进一步分析车上受外力 $F_e=f(t)$作用的情形. 这种外力可能来自许多方面：例如，来自弹簧所附墙的振动，或者来自外界磁场对车(如果车是铁制的)的作用. 这时代替(9)的是

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=F_s+F_d+F_e. \tag{23}$$

故

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=f(t). \tag{24}$$

最重要的情形是外力为 $f(t)=F_0\cos\omega t$ 这种形式周期力的情形，这时(24)变成

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos\omega t. \tag{25}$$

我们已经解出相应的齐次方程(10)，所以为求(25)的通解只要再找出它的一个特解就行了. 这用待定系数法来做最快. 于是，取 $x=A\sin\omega t+B\cos\omega t$ 作为试验解. 代入(25)，得到关于 A 和 B 的下列两个方程：

$$\omega cA+(k-\omega^2M)B=F_0,$$
$$(k-\omega^2M)A-\omega cB=0.$$

这个方程组的解是

$$A=\frac{\omega cF_0}{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c^2}\quad 及 \quad B=\frac{(k-\omega^2M)F_0}{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c^2}.$$

故所求特解为

$$x=\frac{F_0}{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c^2}[\omega c\sin\omega t+(k-\omega^2M)\cos\omega t]. \tag{26}$$

引入 $\phi=\tan^{-1}[\omega c/(k-\omega^2M)]$，可把(26)写成更有用的形式

$$x=\frac{F_0}{\sqrt{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c^2}}\cos(\omega t-\phi). \tag{27}$$

若设所处理的是上述所谓次衰减运动，则(25)的通解是

$$x=e^{-bt}(c_1\cos\alpha t+c_2\sin\alpha t)+\frac{F_0}{\sqrt{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c^2}}\cos(\omega t-\phi). \tag{28}$$

这里的第一项显然是**暂态项**，意即 $t\to\infty$ 时它趋于 0. 事实上，只要存在某种程度的衰减作用，则不管运动是否为次衰减的，就有这种情形(参看习题 17-2). 所以，经过一段时间之后，运动取第二项——**稳态项**所表达的形式. 据此，就可忽略(28)的暂态项，并认为对于大的 t (25)的通解基本上等于其特解(27). 这一强迫振动的频率等于外力频率 $\omega/2\pi$，它的振幅是系数

$$F_0/\sqrt{(k-\omega^2M)^2+\omega^2c^2}. \tag{29}$$

这个振幅式子中包含一些有趣的秘密，因它不仅依赖于 ω 和 F_0，而且还依赖于 k, c 及 M. 例如，我们指出，若 c 很小而 ω 接近于 $\sqrt{k/M}$ (因而 $k-\omega^2M$ 很小)，也就是说若运动只有轻度衰减而外加频率 $\omega/2\pi$ 接近于自然频率

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}-\frac{c^2}{4M^2}},$$

则振幅很大. 这现象叫**共振**. 共振的古典例子是: 齐步走的一队人过桥时若步伐接近桥的自然频率, 桥身所受的强迫振动就形成共振.

最后简单提一下上述机械问题同第 13 节中所论电学问题间的某些连系. 在那一节里曾说明, 若在含一个电阻器、电感器和电容器的简单电路中接上周期性电动势 $E=E_0\cos\omega t$, 则电容器上的电荷 Q 遵循微分方程

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E_0\cos\omega t.$$

这个方程同(25)非常像. 特别是由此可以看出下列一些对应关系:

质量 $M\longleftrightarrow$ 电感 L;

速度 $c\longleftrightarrow$ 电阻 R;

弹簧强度 $k\longleftrightarrow$ 电容倒数 $\frac{1}{C}$;

位移 $x\longleftrightarrow$ 电容器上的电荷.

机械系统和电学系统的这个类比就使两种系统的数学处理法完全一致, 并使我们永远能把对第一种系统的数学结论立即转用于第二种系统. 因此我们知道在给定的电路中也有一个临界电阻, 当电路中的电阻小于此值时, 自由电路将具有振荡性并具有某一自然频率, 电荷 Q 会作受迫稳态振动, 并在条件合适时出现共振现象.

习　题

1. 考察次衰减情况下的强迫振动(27), 求其振幅(29)取得极大值时外力的频率. 这种外加频率是否必然存在? 这种外加频率(如果存在)的值叫**共振频率**. 试证它总小于自然频率.
2. 考察(20)式所描述的次衰减自由振动. 试证在 $t=0,\ T,\ 2T,\ \cdots$ 时 x 取极大值, 而 T 是(21)式所给的"周期". 若 x_1 及 x_2 是 x 的任意两个先后相继的极大值, 试证 $x_1/x_2=e^{bT}$. 这个量的对数 bT 叫振动的**对数缩减** (logarithmic decrement).

3. 半径为 r 的球形浮标半沉水内. 若把它稍往下按, 就有等于所排水的重量的恢复力推它向上; 故若将它往下按后释手, 它就会上下起伏. 若不计水的摩擦力, 试求振动周期.

4. 设在地球上任何两点间挖一直通隧道, 并在其内铺设轨道, 则——不计摩擦力——放在隧道一头的列车将因其自身重量滚动穿越地球, 到达另一端, 然后再回来. 试证整个往返一次所需的时间对所有这类隧道说都一样, 并估算它的值.

21. 牛顿引力定律及行星运动

引力平方反比律是许多自然现象(行星在轨道上绕太阳的运行, 月亮和人造卫星绕地球的运动, 原子物理中带电粒子的运动路线)的基本规律, 因此每个受过科学教育的人都得知道它的一些结论. 本节中我们要从牛顿万有引力律推出开普勒(Kepler)的行星运动定律, 为此, 我们来讨论质量为 m 的一个小质点 (行星) 在质量 M 的一个固定大质点(太阳)引力作用下的运动.

如果在一个问题中, 作用于动点上的力总在该点到一个定点的连线方向上, 最简便的做法是把速度、加速度以及力分解为沿该直线的以及垂直于该直线的两个分量. 这样, 我们取固定质点所在处为极坐标的原点(图 24), 把从原点到动点 m 的矢径表为

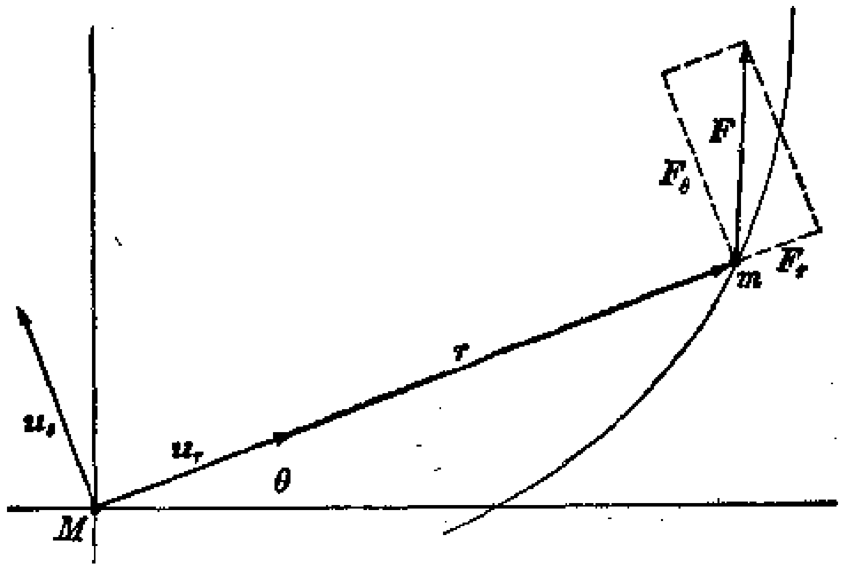


图 24

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{u}_r, \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{u}_r$ 是沿 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量①. 我们显然有

$$\boldsymbol{u}_r=\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta, \tag{2}$$

而垂直于 $\boldsymbol{u}_r$ 指向 θ 增加方向的那个相应单位矢量 $\boldsymbol{u}_\theta$ 是

$$\boldsymbol{u}_\theta=-\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta. \tag{3}$$

将(2)及(3)分别微分后, 得出简单的关系式

$$\frac{d\boldsymbol{u}_r}{d\theta}=\boldsymbol{u}_\theta, \qquad \frac{d\boldsymbol{u}_\theta}{d\theta}=-\boldsymbol{u}_r,$$

这在计算速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 及加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 时至为重要. 直接从(1)计算, 得到

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=r\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt}+\boldsymbol{u}_r\frac{dr}{dt}=r\frac{d\boldsymbol{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}+\boldsymbol{u}_r\frac{dr}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta+\frac{dr}{dt}\boldsymbol{u}_r \tag{4}$$

及

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{u}_\theta+\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\boldsymbol{u}_r. \tag{5}$$

若把作用于 m 上的力 $\boldsymbol{F}$ 写作

$$\boldsymbol{F}=F_\theta\boldsymbol{u}_\theta+F_r\boldsymbol{u}_r, \tag{6}$$

则自(5)及(6)以及牛顿第二运动定律 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$, 得到

$$m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)=F_\theta \quad 及 \quad m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=F_r. \tag{7}$$

这些微分方程制约质点 m 的运动, 并且不管力的性质如何, 它们总是成立的. 我们的下一步工作是对 $\boldsymbol{F}$ 的方向及数值作一些假定之后, 从这些方程提取关于运动的知识.

有心力 如果力 $\boldsymbol{F}$ 没有垂直于 $\boldsymbol{r}$ 的分量, 也就是如果 $F_\theta=0$, $\boldsymbol{F}$ 就叫有心力. 在这一假设下, (7)的第一个方程就变为

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=0.$$

① 这里我们采用一般惯例以黑体字表矢量.

以 r 乘各项，得到

$$r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}+2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=0,$$

或

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0,$$

故得

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=h, \tag{8}$$

其中 h 为某一常数．我们假定 h 是正的，这显然表明 m 是依反时针方向运动的．若 $A=A(t)$ 是 $\boldsymbol{r}$ 从某固定参考位置起扫过的面积，从而 $dA=r^2d\theta/2$；则由(8)得到

$$dA=\frac{1}{2}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}hdt. \tag{9}$$

把(9)从 t_1 积分到 t_2，得到

$$A(t_2)-A(t_1)=\frac{1}{2}h(t_2-t_1). \tag{10}$$

这就给出了开普勒第二定律：从太阳到一行星的矢径 $\boldsymbol{r}$ 在等时间内扫出等面积①．

有心引力　现在再进一步作特殊的规定，假定 F 是有心引力，它的数值(根据牛顿万有引律)正比于两个质量的乘积，而与它们间的距离平方成反比：

$$F_r=-G\frac{Mm}{r^2}. \tag{11}$$

字母 G 表示引力常数，它是自然科学中的普遍常数之一．若把(11)写成稍较简单的形式

① 当丹麦天文学家梯谷·布拉海(Tycho Brahe)于1601年去世时，他的助手开普勒(Johannes Kepler, 1571-1630)继承了他在不同时刻对各行星位置的大量观测数据．开普勒对这些材料不断研究了20年，终于从中提出了关于行星运动的三个简单定律，这是几千年纯粹观察天文学的登峰造极工作．

$$F_r = -\frac{km}{r^2},$$

其中 $k=GM$，则(7)的第二个方程变为

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{r^2}. \tag{12}$$

以后的事实表明，若引入新变量 $z=\frac{1}{r}$ 并用 θ 代替 t 作为自变量，则上述方程就变成一种我们所熟悉的形式。为作这种变换，必须先算出

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\frac{h}{r^2} = -h\frac{dz}{d\theta}$$

及

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{d\theta}\right) = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2 z}{d\theta^2}\cdot\frac{h}{r^2} = -h^2 z^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2}.$$

将以上第二式代入(12)并将(12)中的 r 及 $\frac{d\theta}{dt}$ 分别换成 $\frac{1}{z}$ 及 hz^2，得到

$$-h^2 z^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2} - \frac{1}{z}h^2 z^4 = -kz^2$$

或

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}. \tag{13}$$

这个方程的通解可立即写出：

$$z = A\sin\theta + B\cos\theta + \frac{k}{h^2}. \tag{14}$$

为求简化，我们这样来改变极坐标轴的方向，使当 $\theta=0$ 时 r 为极小(即其时 m 最接近原点)。这表明在该方向上 z 取极大值，故当 $\theta=0$ 时有

$$\frac{dz}{d\theta}=0, \qquad \text{以及} \qquad \frac{d^2 z}{d\theta^2}<0.$$

这些条件说明 $A=0$ 而 $B>0$。现若再把 z 换回到 $\frac{1}{r}$，则(14)可写成

$$r = \frac{1}{k/h^2 + B\cos\theta} = \frac{h^2/k}{1+(Bh^2/k)\cos\theta};$$

若令 $e=Bh^2/k$，这个轨道方程就变成

$$r=\frac{h^2/k}{1+e\cos\theta},\tag{15}$$

其中 e 是个正的常数.

到这里我们就回忆起(图 25)：由 $PF/PD=e$ 所定的轨迹，是以 F 为焦点，d 为准线，e 为偏心率的圆锥曲线. 若用 r 及 θ 来表这个条件，则易见

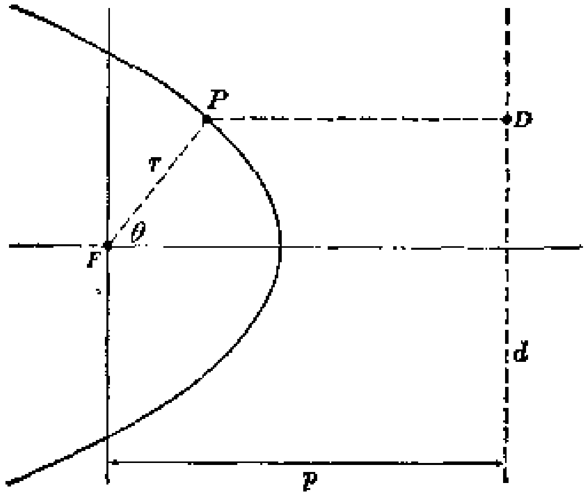


图　25

$$r=\frac{pe}{1+e\cos\theta}$$

是这圆锥曲线的极坐标方程，它按 $e<1$，$e=1$，或 $e>1$ 而分别为一椭圆、抛物线或双曲线. 据此可知轨道(15)表示一圆锥曲线，其偏心率为 $e=Bh^2/k$；又因行星保持在太阳系内从而是沿闭曲线轨道运行的，我们就得到开普勒第一定律：每个行星的轨道是一椭圆，以太阳为其一个焦点.

偏心率的物理意义　从方程(4)得知 m 的动能为

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left[r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].\tag{16}$$

这一系统的势能是将 m 移到无穷远处（那里势能为零）所需的功取负值，也就是等于

$$-\int_r^{\infty}\frac{km}{r^2}dr=\frac{km}{r}\bigg|_r^{\infty}=-\frac{km}{r}.\tag{17}$$

若E是这个系统的总能量(而据能量守恒原理它是常数)，则由(16)及(17)得到

$$\frac{1}{2}m\left[r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]-\frac{km}{r}=E. \tag{18}$$

在$\theta=0$时,(15)及(18)给出

$$r=\frac{h^2/k}{1+e} \quad 及 \quad \frac{mr^2}{2}\frac{h^2}{r^4}-\frac{km}{r}=E.$$

从这两式容易消去r;再从所得结果解出e,有

$$e=\sqrt{1+E\left(\frac{2h^2}{mk^2}\right)}.$$

这就使我们能把轨道方程(15)写成

$$r=\frac{h^2/k}{1+\sqrt{1+E(2h^2/mk^2)}\cos\theta}. \tag{19}$$

由(19)显见轨道之为椭圆、抛物线或双曲线,依$E<0$, $E=0$或$E>0$而定. 所以m运行轨道的性质显然为其总能量E所完全确定. 因此，太阳系里的行星具有负的总能量并按椭圆轨道运行，而以高速度通过太阳系的物体具有正的能量并沿双曲线运行. 有意义的一点是，如果能把像地球这样的行星从后方推动一下,把它的运行速度增到足够大,使其总能量大于0,它就会进入双曲线轨道而永远离开太阳系.

行星的运行周期　现在限于讨论m具有椭圆轨道(图26)的情形. 这轨

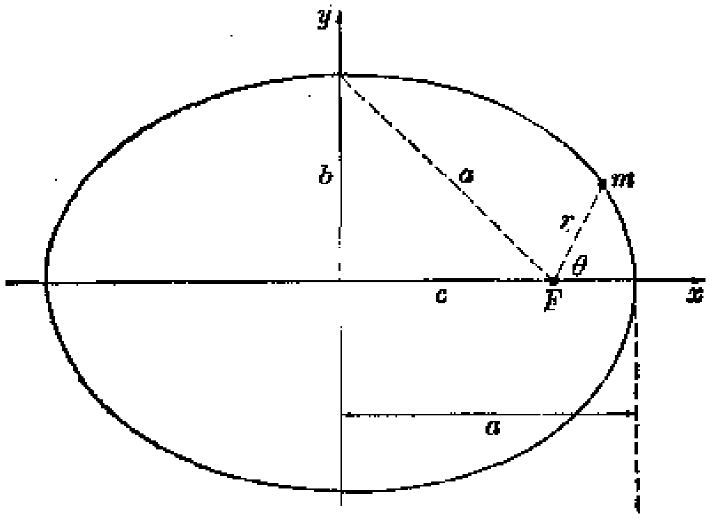


图 26

道的极坐标方程是(15)，它的直角坐标方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

从初等解析几何知道 $e=c/a$，而 $c^2=a^2-b^2$，故 $e^2=(a^2-b^2)/a^2$，从而

$$b^2=a^2(1-e^2). \tag{20}$$

从m到焦点F的平均距离a是r的最大值与最小值之和的一半，故(15)及(20)给出

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2/k}{1+e}+\frac{h^2/k}{1-e}\right)=\frac{h^2}{k(1-e^2)}=\frac{h^2a^2}{kb^2},$$

于是有

$$b^2=\frac{h^2a}{k}. \tag{21}$$

若T是m的周期(即m沿轨道运行一整周所需的时间)，则由于椭圆的面积是πab，故从(10)得知$\pi ab=hT/2$. 利用(21)，这就有

$$T^2=\frac{4\pi^2a^2b^2}{h^2}=\left(\frac{4\pi^2}{k}\right)a^3. \tag{22}$$

在这一理想化的分析过程中，常数$k=GM$只取决于中心体的质量M而与m无关，故(22)对太阳系中的所有行星都成立，而这就是**开普勒第三定律**：行星运行周期的平方正比于其平均距离的立方.

本节所述思想当然主要来源于牛顿(参看附录 B). 不过这里所作的论述同他原来的很不相同，因他没有明确运用微积分中的方法.

习　题

1. 试证，从方程(8)及(15)这种形式的头两个开普勒定律可以推出：m受一个指向原点的引力作用，其数值与r的平方成反比. 这是牛顿的基本发现，因为由此引起他提出他的引力律并考察其种种推论.
2. 试证一行星在其轨道上任一点处的速度v由下式给出：

$$v^2=k\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).$$

3. 假如地球爆裂成碎片，且这些碎片以相同速度(相对于太阳而言)朝各个方向

飞出而进入其各自的轨道. 试证，除了那些被吸引到太阳或逸出太阳系的碎片之外，所有其他碎片以后将在同一地点重新聚合.

附录 A. 欧　拉

欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783)是瑞士最著名数学家，也是近世三大数学家之一（另两个是高斯(Gauss)和黎曼(Riemann)）. 他也许还是古今各领域里最多产的作家. 他的全集的出版工作开始于1911年，估计如要完成整个计划，将需要印出100大卷以上. 他的文字既轻松又易懂，堪称这方面的典范. 他从来不压缩字句，总是津津有味地把他那丰富的思想和广泛的兴趣写得有声有色. 法国物理学家阿拉哥(Arago)在谈到欧拉的举世无双的数学才能时说过："他做计算毫不费力，就像人们平常呼吸空气或像雄鹰凭风展翅翱翔一样". 他在生命的最末17年间完全失明，但凭着他那了不起的记忆力和丰富的想像力，加上有人帮助他口授笔录来撰写他的书和科学论文，他实际上反而更多地写出了他那已经是卷帙浩繁的著作.

欧拉是巴塞耳(Basel)地方人，是约翰·伯努利在巴塞耳大学的一个学生，但很快他就超出了他的老师. 他一生的工作期间是作为柏林科学院院士和彼德堡科学院院士在两地渡过的. 他是个有广泛文化素养的人，深谙古典语文和文学(他能背诵罗马诗人维吉尔(Virgil)的史诗 Aeneil)，懂得许多现代语文、生理学、医学、植物学、地理以及他那个时代的全部物理科学. 不过他对形而上学(意即哲学——译者)和辩论缺乏才能，他和伏尔泰在腓特力大帝的宫廷里作心平气和的论争时总是输的. 他的私人生活是再也安静平淡不过的了，这对于一个有13个孩子的人来说是很难能可贵的.

欧拉本人虽不是教师，但他对数学教学的影响之深超过任何人. 这主要是通过他的三大著作产生的：《无穷分析引论》(Introductio in Analysin Infinitorum, 1748)；《微分法》(Institutiones Calculi Differentialis, 1755)；和《积分法》(Institutiones Calculi Integralis,

1768—1794)．有句老话说，自从1748年以后，所有初等微积分和高等微积分教科书，基本上都抄袭欧拉的书，或者抄袭那些抄袭欧拉的书．这话是颇有道理的①．这些著作把前人的发现加以总结和定型，并且充满了欧拉自己的见解．他推广和改进了平面与立体解析几何，引入了对三角学的分析处理法，并首创对于函数 $\log x$ 与 e^x 的现代讲法．他关于负数和复数的对数提出了前后一贯的理论，并发现 $\log x$ 是无穷多值的．通过他的著作，e，π 及 i 这些记号才在所有数学家中间广泛流行，是他把这三者联系在一个令人叫绝的关系式 $e^{\pi i}+1=0$ 里．这是他那个著名公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$（它把指数函数与三角函数连系起来）的特例．他所创的标准数学记号中有 $\sin x$，$\cos x$，以及用 $f(x)$ 来表一个没有明确规定的函数，以及用 Σ 来表示求和②．在运用无穷级数、无穷乘积、连分数方面，他是最早并且最擅长的一个大师，并且在他的著作中充满了这些方面的惊人发现．他喜欢搞特定的具体问题，而不像现代数学家那样热中于搞一般理论．他具有无与伦比的洞察力，能看出那些似乎毫不相关的公式之间的联系，从而开辟了闯向分析中新领域的许多途径，留给他的后人去开垦③．

他对微分方程提出了许多重要的思想：各种降阶法，积分因子（也常叫**欧拉乘数**）的想法，本章中所讲二阶线性方程理论的大部分内容，幂级数解法——这一切都应归功于欧拉④．此外，他对变分法作出了第一个系统的论述（从他那个极小曲线的基本微分方程出发），发现了

---

① 参看 C. B. Boyer:《近世最著名教科书》(The Foremost Textbook of Modern Times)，载 Am. Math. Monthly, vol. 58 pp. 223—226, 1951.

② 参看 F. Cajori 著《数学记号史》("A History of Mathematical Notations", Open Court, La Salle, Ill., 1929).

③ 对于那些想亲自接触欧拉思想的读者，可参阅 G. Polya 的杰作《数学与合情推理》(Mathematics and Plausible Reasoning) 的卷 I 第六章．Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

④ 参阅 E. L. Ince 在其《常微分方程》(Ordinary Diff. Eqs., pp. 533—536) 一书中关于历史概述部分的材料．

确定嘎马(gamma)函数和倍泰(beta)函数的欧拉积分，并引入欧拉常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=0.5772\cdots,$$

这是数学里面继 π 和 e 之后最重要的特殊数①. 他曾用过福里哀级数，在对绷紧圆膜振荡的研究工作中遇到过贝塞耳函数，用拉普拉斯变换解过微分方程——这一切工作都在福里哀、贝塞耳、和拉普拉斯出生之前. 现代数学的主流之一——拓扑学，来源于他对哥尼斯堡桥问题的解决②，和他所发现的简单多面体的角顶数、边数和面数之间的关系式 $V-E+F=2$.

在数论方面，他最早发表对费马定理及费马二平方和定理(参看第6节)的证明.其后他引入欧拉 ϕ 函数，将这些经典问题中的第一个结果加以推广；他对第二个定理的证明化了他七年不断的努力. 此外，他证明了每个正整数是四个平方数之和，考察了二次互反律 (law of quadratic reciprocity)，最早提出了划分理论，这就是确定一个已给正整数能以几种方式分解为正整数之和的问题所引起的理论.

他的一些最有趣的工作是关于质数方面的. 所谓质数就是只以1

---

① 参阅 Philip J. Davis《欧拉积分：gamma 函数的历史侧记》(Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function)一文，载于 Am. Math. Monthly, vol. 66. pp. 849—869, 1959.

② 哥尼斯堡桥问题 (Königsberg bridge problem)：在流经东普鲁士哥尼斯堡的 Pregelarme 河上有两个岛，其上共有七个桥(图 A 中的 b_i)，使两岛彼此并与两岸相通. 当

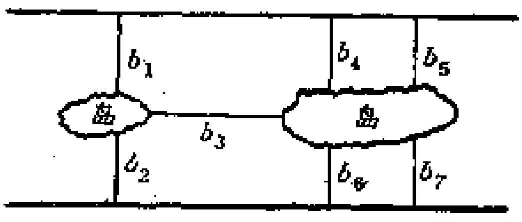


图 A

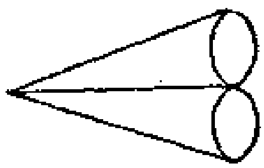


图 B

地人总想能采取一条合适的路线通过每个桥而又不在任一桥上重走两次. 欧拉听说之后把这问题简化为图 B 中的诸线能否用一笔勾画而不重描其中任何一段. 他证明在上述情形下这问题不能解，并提出在什么条件下可能的准则. ——译者注

及 p 为其正因子的那些整数 $p>1$. 他利用调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 的发散性，如此简单而巧妙地证明了质数个数无穷这个所谓欧几里德定理，使我们不揣冒昧把它写在这里. 假如质数只有 N 个：p_1，p_2，…，p_N，则每个整数 $n>1$ 可按唯一方式表为 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_N^{a_N}$. 若 a 是这些指数中的最大者，则有

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant$$

$$\left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\cdots+\frac{1}{p_1^a}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\cdots+\frac{1}{p_2^a}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_N}+\frac{1}{p_N^2}+\cdots+\frac{1}{p_N^a}\right),$$

这是只要把右边的各个因子乘出来就容易看出的. 但从 $1+x+x^2+\cdots=1/(1-x)$（它对 $|x|<1$ 成立）这个简单公式，可看出上面这个乘积中的各因子小于下面各数

$$\frac{1}{1-1/p_1},\ \frac{1}{1-1/p_2},\ \cdots,\ \frac{1}{1-1/p_N},$$

因此对任何 n 有

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\frac{p_1}{p_1-1}\,\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_N}{p_N-1}.$$

这就同调和级数的发散性相矛盾，因而证明了质数的个数不可能只是有限个. 他又证明各项为质数倒数的级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots$$

是发散的，并发现下面这个奇妙的恒等式：若 $s>1$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\frac{1}{1-1/p^s},$$

这里右边的式子表示数 $(1-p^{-s})^{-1}$ 的乘积，其中 p 是所有质数. 以后在第五章附录E关于黎曼的注记里还要再提到这个恒等式.

在欧拉的时代还不分什么纯粹数学和应用数学，对他来说，整个物理世界正是其分析方法的用武之地. 古典力学的基础是牛顿奠立的，

而欧拉则是其主要建筑师. 他在其 1736 年的论著中最早明确提出质点或粒子的概念, 最早研究质点沿任一曲线运动时的加速度, 并在有关速度与加速度问题上应用矢量概念. 他在数学物理上的成就是如此之多, 他的影响是如此广泛, 以致物理学家并不把他的大部分发现归功于他, 而只认为是理所当然的事. 然而, 我们确实知道欧拉发现的有: 刚体旋转运动方程, 流体动力学中关于理想不可压缩流体流动的方程, 弹性梁的弯曲定律, 柱弯曲理论中的临界负荷. 在好些情况下, 他的科学思维促使他所提出的一些想法并不能为当代学者所理解. 例如, 他预料到有辐射压强的现象, 这在现代关于恒星稳定性的理论中是非常重要的, 而麦克斯韦直到一百多年之后才在他的电磁学著作中重新发现.

欧拉是数学界的莎士比亚, 全才, 丰富多采, 取之不尽用之不竭.

附录 B. 牛　顿

大多数人都多少知道牛顿(Issac Newton, 1642—1727)的名字和声誉, 因为从他死后迄今两个半世纪里, 他这个万有引力律的发现者仍然举世闻名不逊当年. 但是, 他以磅礴之势作出如此重大贡献之际, 实际上几乎创立了现代物理科学, 从而对文明生活方向影响之深远, 超过一些国家的兴衰存亡, 知悉这一点的人就不那么多了. 凡是有资格作出判断的人, 都一致认为他是人类所曾出现的极少数几个超天才之一.

牛顿出生于英国伍尔索普(Woolsthorpe)村的农家. 他的早年生活世人所知极少, 他在剑桥大学求学时在外表上似乎也并不崭露头角. 1665 年发生瘟疫, 大学被迫关闭, 牛顿回到乡下家中, 一直住到 1667 年. 在这乡村幽居的两年之中, 22 岁到 24 岁的牛顿天才横溢, 风华正茂, 源源不竭地作出了人类思想史上无与伦比的发现: 指数为负数和分数的二项式级数; 微分学和积分学; 作为了解太阳系结构的钥匙的万有引力定律; 用三棱镜把日光分解为可见光谱, 借此以解释虹彩的由来并有助于理解光的一般性质. 他在晚年追忆这段峥嵘的青春岁月时说: "当年我正值发明创造能力最强的年华, 比以后任何时期更专心致志于

数学和哲学(即科学)."

牛顿一直是个内向沉潜的人，他那不朽的发现大都藏在自己心头. 他对发表文章没有多大兴趣，他的大部分巨著都是在朋友们的劝告和坚决请求之下勉强搞出来的. 但是他的老师巴罗(Isaac Barrow)是这样明确无误地认清了他那独一无二的才能，竟使他在1669年辞去他的教授职位而让给他的学生(这在学术界中是空前绝后之举!)，此后27年间牛顿就安身立命于剑桥大学. 他在数学上的发现从来没有写成连贯的形式真正发表过，而几乎只是出于偶然的机缘为少数人所知道，例如通过一些谈话以及在一些答复问题的书信中. 他似乎认为他所发明的数学方法主要是作为研究科学问题的有用工具，而本身价值比较小. 与此同时，德意志的莱布尼兹也独自发明了微积分；而通过他同伯努利家族成员间的频繁书信往来，其后通过欧拉的著作，这门新分析的领导权落入欧洲大陆人之手一直达200年之久①.

牛顿在剑桥执教的早期生活后人知之不多，但光学和制作望远镜肯定是他当时的主要兴趣之一. 他做了许多磨透镜的试验（用他自己制作的工具)，并在1670年左右造出第一架反射望远镜，那是今日用于帕洛麦(Palomar)山以及世界各地大望远镜的老祖宗. 他用三棱镜分析日光的实验既切实可行而又简单，这始终标志着他的这个早期工作是实验科学的不朽典范之一. 但这仅仅是开始，因他不断深入探索光的奥秘；而他在这方面的工作不断显示他具有最高度的实验天才. 他曾发表了一些发现，但当时科学界人士对此愚昧无知而挑剔指责，使他重新龟缩，加强了此后只为满足自己爱好而进行研究的决心. 20年之后

① 读读牛顿和莱布尼兹（通过奥登堡，Oldenburg）在1676和1677年的通讯是很有意思的(参看 H. W. Turnbull 编《牛顿书信集》("The Correspondence of Isaac Newton"), Cambridge, New York, 1959, 1961)). 在第165, 172, 188及209件中，牛顿讨论了他的二项级数，但在提到他关于微积分和微分方程的思想时，却用密码文字书写不让人知道，而莱布尼兹则毫无拘束地发表了他的那一套微积分学. 第190件也是有相当价值的，因为在那里牛顿记下了关于微积分基本定理的叙述和证明，而这也许是最早的.

他在致莱布尼兹的信中用如下的话发泄了他的这种情绪:"至于分色现象问题…我想自己已发现了最可靠的解释,但我不愿写书发表,深恐无知之徒因此对我发起攻击和责难."①

在十七世纪70年代晚期,牛顿又周期性地陷入一段讨厌科学工作的年月,把他的精力用到别的方面去了. 到那时为止他还没有发表过关于动力学和引力方面的材料,这方面的许多发现他还都放在书桌抽屉里无人理睬. 但最后因被虎克(Robert Hooke)的自诩和对他的指责所激怒,并为哈雷(Edmund Halley, 以发现哈雷彗星闻名于世)的外交辞令所开导,他又把心思放在这些问题上,开始撰写他那最伟大的著作《原理》②. 牛顿的搞科学工作有点象活火山,长期的平静,但不时迸发出几乎是超人的大量工作. 《原理》是在他精力完全集中的、难以置信的18个月里完成的,而当它在1687年问世时,立刻被人承认为人类睿智的至高成就之一. 在书中他奠立了理论力学及流体力学的基本原理;对波动现象作出了第一次数学分析;从引力的平方反比例定律推出了开普勒定律,并解释了彗星的轨道;计算了地球、太阳、有卫星的一些行星的质量;说明地球两极稍扁的缘故并以此来解释岁差 (precession of the equinoxes);并且建立了潮汐理论. 这些只不过是那部巨著中的吉光片羽. 《原理》历来是本难读的书,文体冷漠使人有超尘绝俗之感,这也许对那宏博的题材是合适的. 此外,紧凑的数学内容几乎完全由古典几何所组成,而这种几何在当时很少有人注意,至今懂得的人更少③. 在他的动力学和天体力学中,牛顿胜利完成了哥白尼、开普勒和伽利略所开创的学说. 这一胜利是这样的全面, 以致使此后200

① 见《书信集》第427件.

② 全名为《自然哲学的数学原理》(Philossphiae Naturalis Principia Mathematica).

③ 还有另一方面的困难是这种"几何"往往是从微积分推理翻译而来的一种几何语言,这就几乎不可能使当代的读者真正理解. 参阅J. E. Littlewood所著《一个数学家的杂记》(A Mathematician's Miscellany)中"牛顿和一个球的引力"那一段,载该书pp. 94—99, Methuen, London, 1963版.

年间，这一领域内最伟大科学家的工作，相形之下显得只不过是这部巨著的一些脚注．在这里还值得指出的是，使我们的天文知识逾越太阳系而深入整个宇宙的光谱学，就起源于牛顿对太阳光的光谱分析．

牛顿横溢的天才在撰写《原理》之后又从科学转向其他方面．1696年他离剑桥去伦敦任造币厂主任（其后任厂长），并在他那长寿的余年中稍稍投身社交界，甚至开始享受他在科学界获有至高盛名这种独一无二的地位．虽然他的兴趣和环境有了这些改变，但他那无比的智力丝毫未见减退．例如，一天下午他在造币厂忙碌了整日后回家，获悉约翰·伯努利的速降线问题——"向全世界最精明数学家"挑战的一个问题，他在睡觉前就解了出来．

对科学上意义更大的是他在 1704 年发表的《光学》．他在这书里总结和推广了他早年对光和色方面的研究工作．他在附录里增添了他那著名的"探讨"（即对他所无法掌握的未来科学领域的揣测）．"探讨"中有一部分内容是关于他终生深感兴趣的化学（或者按当时的说法，即炼金术）．他对物质可能具有的本性作出了许多试探性的然而是非常谨慎的结论（总是依据于实验的）；虽然他对原子（甚至原子核）的揣测一直要等到十九世纪末和二十世纪初那种精细的实验才能检验，事实证明他的主要思路是完全正确的①．所以，牛顿在这个领域里的科学直观能力也是如此深远和准确，不仅远远超过他的同时代人，而且也超过他的好几代后继学者．此外，我们再分别从他的"探讨"1 和"探讨"30 里摘录两段惊人的话："物体能否从远处对光起作用，并通过这作用使光线弯曲？"以及"发亮物体和光是不是可以互相转化呢？"这话最清楚不过地表明牛顿在这里猜测引力作用能使光线弯曲以及质量与能量的等价性——这些是狭义相对论中的主要结论．在其他场合下，他似乎通过神秘的直观途径，也能认识到远比他所愿意或能够说明其理由的事物更多的事物，如他在给一个朋友信中有这样一句难以捉摸的话："根

① 参看 S. I. Vavilov 文《牛顿与原子学说》，载《牛顿三百周年纪念文集》（"Newton Tercentenary Celebrations", Cambridge University Press, New York, 1947）．

据我获得这一认识的源泉，它对我是一清二楚的，但我不愿着手去证明它以使别人相信."[1] 不管他说的这个源泉究竟是什么样的东西，这无疑来自他那非凡的专心致志．当有人问他怎么能作出这些发现时，他说："我把问题时时摆在心头，一直等到开头的一点苗头逐渐破晓而变成阳光普照."这话听起来是最简单不过的，但在科学或数学上有过工作经验的任何人，都知道要把一个问题时时摆在心头是多么不易，即使是多几秒或多几分钟也不容易．人的注意力会分散；问题会不断从脑袋里溜走，并且需要不断地用坚强的意志把它拉回来．根据当时目击者的记载，牛顿似乎能够毫不费力地在好几个小时、好些天或几个星期持续专心思考他的问题，甚至连偶尔吃点东西或睡一下觉也很难打断他那紧紧抓住问题不放的心思．

牛顿常被人认为或描述为一个极端的理性主义者，是理性时代的化身．但也许用中世纪的观点来认识他更为确切：他是一个献身的、孤寂的、富于直观能力的神秘主义者，对他来说，科学和数学乃是探究宇宙秘奥的手段．

① 《书信集》第 193 件．

第四章　振荡理论及边值问题

22. 解的定性性质

我们自然觉得一个微分方程应该解出来，而在第三章里，我们的主要目的是讲各种方法，以求

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

的显式解．然而遗憾的是——正如我们曾试图强调指出的，用熟悉的初等函数来解出这方程的可能性很少．这种情况促使我们把问题提到更高一层以扩大视野，并承认我们的真正目标是要了解(1)的解的本质和特性．如果能通过这些解的初等式子来达到这个目的，那当然很好．如果不能，就得设法找别的途径，以求达到同一目的．本章中我们要把注意力转向这样一个问题，即在没有得出(1)的解的表达式时，看看从直接分析方程本身着手，能够对这些解的基本特征有何了解．令人惊异的是，用这种方法居然能得出这么多有趣和有用的知识．

为说明微分方程的解的许多性质，可以直接从研究方程本身得出，而无需按任何传统意义将它求解，我们拿熟知的方程

$$y''+y=0 \tag{2}$$

为例，来进行讨论．我们完全知道，$y_1(x)=\sin x$ 及 $y_2(x)=\cos x$ 是(2)的两个线性无关解；它们由初始条件 $y_1(0)=0$，$y_1'(0)=1$ 及 $y_2(0)=1$，$y_2'(0)=0$ 所完全确定；并且它的通解是 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$．在通常情况下，知道了这一切，我们就认为(2)已经完全解出，因为函数 $\sin x$ 及 $\cos x$ 是老朋友了，我们很了解它们．然而我们对 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的了解可以认为是历史上的偶然事件；并且，为了强调我们刚提出的观点，现在假装我们对这两个熟悉的函数毫无所知．我们的目的是要看看怎样从(2)本身以及解所满足的初始条件，摘出它们的性质来．我们要用的工具只有定性方面的论证，以及第 14 与 15 节中所讲的基本

原理.

因此，设 $y=s(x)$是(2)的由初始条件 $s(0)=0$ 及 $s'(0)=1$ 所确定的解. 如果我们想让 x 从 0 起增加画 $s(x)$的曲线，初始条件告诉我们要把曲线从原点画起，然后让它开始以斜率 1 上升(图 27). 从方程本身，我们知道 $s''(x)=-s(x)$，所以曲线在 x 轴之上时，$s''(x)$是负数，并且随着曲线的上升而减小. 由于 $s''(x)$ 是斜率 $s'(x)$ 的变化率，所以这个斜率的减小率随着曲线的上升而加剧，并且必定在某一点 $x=m$ 处减到 0. 之后当 x 继续增大时，曲线就朝 x 轴下落，$s'(x)$以减小的速率而减小，使曲线在某点处穿过 x 轴，现把该点规定为 π. 由于 $s''(x)$ 只依赖于 $s(x)$，可见 $x=0$ 与 $x=\pi$ 间的曲线图形对称于直线 $x=m$，故有 $m=\frac{\pi}{2}$，于是 $s'(\pi)=-1$. 用同样的论点可以说明下一段曲线是前一段弧的倒影，而且往下一直如此，乃至无穷.

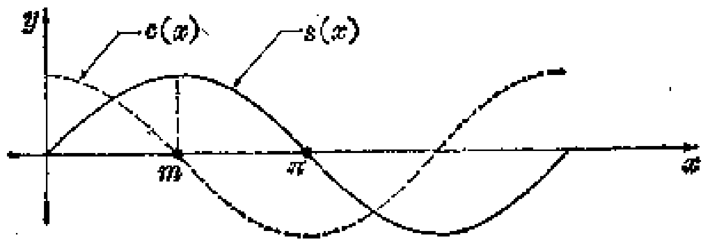


图 27

为便于继续探讨，到这里可引入 $y=c(x)$ 作为 (2) 的由初始条件 $c(0)=1$ 及 $c'(0)=0$ 确定的解. 这些条件告诉我们(图 27)，曲线 $c(x)$ 从点(0, 1)出发往右伸展，起初的斜率是 0. 由于根据方程(2)有 $c''(x)=-c(x)$，故根据同样理由可知曲线往下弯并且穿过 x 轴. 我们自然会猜想 $s(x)$的第一段弓形弧的高度是 1，$c(x)$的第一个零值点是$\frac{\pi}{2}$等等；但要证明这些猜想确是事实，我们先来证明

$$s'(x)=c(x) \quad 及 \quad c'(x)=-s(x). \tag{3}$$

为证第一式，我们先指出，从(2)可得 $y'''+y'=0$，即$(y')''+y'=0$，故知(2)的任一解的导数仍是一个解(参看习题 17-3)，于是 $s'(x)$及 $c(x)$

都是(2)的解，而根据定理 14-A，只要证明它们在 $x=0$ 处有相同的值和相同的导数就行了．而这可由 $s'(0)=1$, $c(0)=1$ 及 $s''(0)=-s(0)=0$ 及 $c'(0)=0$ 立即得出．(3)的第二式是第一式的直接推论，因为 $c'(x)=s''(x)=-s(x)$．现在我们利用(3)来证明

$$s(x)^2+c(x)^2=1. \tag{4}$$

由于(4)式左边的导数是

$$2s(x)c(x)-2c(x)s(x),$$

而它又等于零，故知 $s(x)^2+c(x)^2=$常数，而这常数必等于1，因为 $s(0)^2+c(0)^2=1$．于是由(4)立即可知 $s(x)$ 的第一段弓形弧的高度是1，而 $c(x)$ 的第一个零值点是 $\frac{\pi}{2}$．这一结果也使我们能证明 $s(x)$ 和 $c(x)$ 是线性无关的，因为它们的朗氏式

$$\begin{aligned} W[s(x), c(x)] &= s(x)c'(x)-c(x)s'(x) \\ &= -s(x)^2-c(x)^2=-1. \end{aligned}$$

按几乎是同样的方式，可继续证明以下的事实：

$$s(x+a)=s(x)c(a)+c(x)s(a); \tag{5}$$

$$c(x+a)=c(x)c(a)-s(x)s(a); \tag{6}$$

$$s(2x)=2s(x)c(x); \tag{7}$$

$$c(2x)=c(x)^2-s(x)^2; \tag{8}$$

$$s(x+2\pi)=s(x); \tag{9}$$

$$c(x+2\pi)=c(x). \tag{10}$$

这些证明都不难，留待读者去做(参看习题1)．此外还容易从以上结果看出：$s(x)$ 和 $c(x)$ 的正的零值点分别是 $\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 和 $\pi/2$, $\pi/2+\pi, \pi/2+2\pi, \cdots$．

从以上讨论可得出两点重要体会．第一，我们只用微分方程的方法，从(2)提出了关于函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的几乎一切重要性质，而无需事先知道什么三角学．第二，我们所用的工具主要是根据凸性的讨论(涉及二阶导数的正负和数值大小)以及第 14、15 节中所讲线性方程

的基本性质.

当然，$\sin x$ 和 $\cos x$ 的上述性质，大部分只是为这两个函数所特有的. 然而其性态的中心特点——他们起伏振荡，具有不同而交替出现的零值点这一事实——可以推广到远比这两个函数多的其他函数上去. 顺着这个方向搞出来的下述结果叫**斯图尔姆分离定理**(Sturm separation theorem)①.

定理A 若 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 是

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

的两个线性无关解，则此二函数的零点各不相同且交互出现，也就是说，$y_1(x)$ 在 $y_2(x)$ 的两个相邻零点之间恰好有一个零点，反之亦然.

证明 论证的依据主要是这个事实(参看第 15 节引理)：由于 y_1 及 y_2 线性无关，它们的朗氏式

$$W(y_1, y_2)=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$$

不等于零，因此——由于它是连续的——它是不变号的. 首先，容易看出 y_1 和 y_2 不能具有公共的零点；否则的话，它们的朗氏式将在该处等于零，而这不可能. 现在假定 x_1 及 x_2 是 $y_2(x)$ 的两个相邻零点，我们来证 y_1 在两点之间等于 0. 在 x_1 及 x_2 处，朗氏式显然变为 $y_1(x)y_2'(x)$，因此 $y_1(x)$ 及 $y_2'(x)$ 这两个因子在那两点处都 $\neq 0$. 其次，$y_2'(x_1)$ 及 $y_2'(x_2)$ 必然是异号的，因若 y_2 在 x_1 处渐增，它必然在 x_2 渐减，或者它在 x_1 处渐减而在 x_2 处渐增. 由于朗氏式不变号，故 $y_1(x_1)$ 及 $y_1(x_2)$ 必然是异号的，而由于 y_1 为连续，故 y_1 必在 x_1 与 x_2 之间某点处等于 0. 我们指出，y_1 在 x_1 与 x_2 之间等于 0 的次数不能多于一次，因若多于一次，那末用同样的论点可证 y_2 必在 y_1 的这两个零点之间某处等于 0，这就跟原来假定 x_1 及 x_2 是 y_2 的两个相邻零点矛盾了.

---

① 斯图尔姆(Jacques Charles François Sturm, 1803—55)，瑞士数学家，但大部分时间生活在巴黎. 他一度当德布罗意(de Broglie)家的家庭教师，其后历任他职，终于继布瓦桑(Poisson)任索邦(Sorbonne)大学力学教授. 他的主要工作是微分方程中的所谓斯图尔姆-刘维尔理论，从他以后，这理论在纯粹数学和数学物理上的重要性逐年在不断增长.

前述对方程 $y''+y=0$ 的凸性论证清楚表明，在讨论解的振荡性时，考察缺少一阶导数项的方程是方便的。现在我们来证明，任何下列形式的方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0, \tag{11}$$

可通过因变量的简单置换，写成

$$u''+q(x)u=0. \tag{12}$$

平常我们称(11)是齐次二阶线性方程的标准形式，而称(12)是它的正规形式。为把(11)写成正规形式，设 $y(x)=u(x)v(x)$，故有 $y'=uv'+u'v$ 及 $y''=uv''+2u'v'+u''v$。以此代入(11)后，得到

$$vu''+(2v'+Pv)u'+(v''+Pv'+Qv)u=0. \tag{13}$$

令 u' 的系数等于0并求解，得知

$$v=e^{-\frac{1}{2}\int P dx} \tag{14}$$

能使(13)化为正规形式(12)，其中

$$q(x)=Q(x)-\frac{1}{4}P(x)^2-\frac{1}{2}P'(x). \tag{15}$$

由于(14)所给出的 $v(x)$ 决不会等于0，故上述将(11)化为(12)所作的变换对解的零点毫无影响，从而使解的振荡情况保持不变，而这正是我们这里所关心的事。

其次我们来证明：若(12)中的 $q(x)$ 是个负值函数，那末这方程的解根本不振荡。

定理B　若 $q(x)<0$ 且 $u(x)$ 是 $u''+q(x)u=0$ 的非平凡解，则 $u(x)$ 至多有一个零点。

证明　设 x_0 是 $u(x)$ 的一个零点，于是 $u(x_0)=0$。由于 $u(x)$ 不是平凡解(即不恒等于0)，故从定理14-A可知 $u'(x_0)\neq 0$。为具体起见，设 $u'(x_0)>0$，因而在 x_0 右边的某个区间上 $u(x)$ 是正的。由于 $q(x)<0$，$u''(x)=-q(x)u(x)$ 在该区间上取正值。这说明斜率 $u'(x)$ 是增函数，故 $u(x)$ 在 x_0 右边不会有零点，同样可知它在 x_0 左边也没有。当 $u'(x_0)<0$ 时，同样的论点也适用，故 $u(x)$ 或者根本没有零值点，或者只有一

个，证完.

由于我们关心的是解的振荡性，上述结论使我们研究(12)时可限于考察 $q(x)$ 为正值函数的情形.

甚至在 $q(x)>0$ 的情形，解也未必就有振荡性. 为了解其中的原因，设 $u(x)$是(12)的一个解，而(12)中的 $q(x)>0$. 如果我们考察 x 轴之上的一部分曲线(图 28)，则该处 $u''(x)=-q(x)u(x)$是负的，故斜率 $u'(x)$是渐减函数. 如果这个斜率在什么地方变成负的，那末曲线显然会在右边某处穿过 x 轴，那就会得到 $u(x)$的一个零点. 我们知道这在 $q(x)$是常数的情形下是会发生的. 另一种可能的情形是 $u'(x)$ 虽渐减，但决不减到 0，因而曲线继续上升，如图 28 中上面那段虚线所示. 从这些话可以相当清楚地看出，只要 $q(x)$不减小得太快，$u(x)$将会随着 x 的增大而出现零点. 这使我们引出以下的定理.

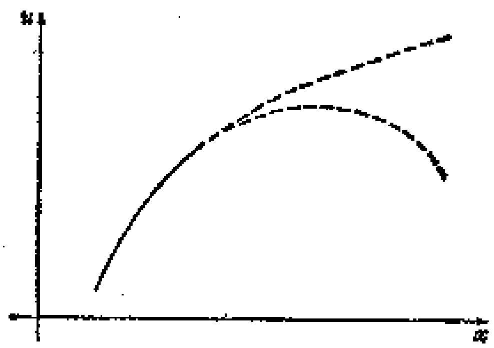


图 28

定理C 若 $u(x)$ 是 $u''+q(x)u=0$ 的任一非平凡解，其中对一切 $x>0$ 有 $q(x)>0$. 若

$$\int_1^{\infty} q(x)dx=\infty, \tag{16}$$

则 $u(x)$ 在正 x 轴上有无穷多零点.

证明 假定情况相反，即 $u(x)$ 在 $0<x<\infty$ 上至多有有限个零点，因而存在一点 $x_0>1$，使得对于所有 $x\geqslant x_0$ 有$u(x)\neq 0$. 不失一般性，我们显然可以假定对于所有的 $x\geqslant x_0$ 有 $u(x)>0$. 因为如有必要可把 $u(x)$ 换成 $-u(x)$. 我们的目的是要证明 $u'(x)$在 x_0 右边某处为负(因为根

据前述，这就意味着 $u(x)$ 在 x_0 右边有一零点)，来推翻这个假定. 对于 $x\geqslant x_0$，若令

$$v(x)=-\frac{u'(x)}{u(x)},$$

则

$$v'(x)=q(x)+v(x)^2;$$

将上式从 x_0 积分到 $x(x>x_0)$，得到

$$v(x)-v(x_0)=\int_{x_0}^{x}q(x)dx+\int_{x_0}^{x}v(x)^2dx.$$

现在利用 (16) 便可断言当 x 取得足够大时 $v(x)$ 是正的. 这说明当 x 足够大时 $u(x)$ 与 $u'(x)$ 异号，故 $u'(x)$ 为负，证毕.

习　题

1. 按照上述讨论的精神，试证公式(5)到(10).
2. 试证，在 $ad-bc\neq 0$ 的情况下，函数 $a\sin x+b\cos x$ 及 $c\sin x+d\cos x$ 的零点各不相同且交替出现.
3. 试求贝塞耳函数

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

的正规形式，并利用它来证明其每个非平凡解都具有无穷多正的零点.

4. 定理C中所设条件对方程 $y''-(k/x^2)y=0$ 并不成立，但其结论却随着正的常数 k 的数值不同而有时成立有时不成立. 试证，若 $k>1/4$，则每个非平凡解具有无穷多正的零点，而若 $k\leqslant\frac{1}{4}$ 则只有有限个.

23. 斯图尔姆比较定理

这一节里我们继续研究微分方程

$$y''+q(x)y=0,\quad (q(x)>0) \tag{1}$$

的非平凡解的振荡性. 先讲一个定理，来排除在闭区间上有无穷多次振荡的可能性.

定理A　设 $y(x)$ 是方程(1)在闭区间$[a,b]$上的一个非平凡解，则$y(x)$

在该区间上至多具有有限个零点.

证明　假定不是这样，即假定 $y(x)$ 在$[a,b]$上有无穷多个零点. 由此知$[a,b]$内有一点 x_0 及零点序列 $x_n\neq 0$ 使 $x_n\to x_0$①. 因 $y(x)$ 在 x_0 处连续且可微，故有

$$y(x_0)=\lim_{x_n\to x_0} y(x_n)=0$$

和

$$y'(x_0)=\lim_{x_n\to x_0}\frac{y(x_n)-y(x_0)}{x_n-x_0}=0.$$

根据定理 14-A，上述一切说明 $y(x)$ 是(1)的平凡解，这一矛盾便完成了所需证明.

现在我们记起，斯图尔姆分离定理告诉我们：(1)的任何两个（非平凡）解的零点，是互相重合还是交替出现，依这两个解是线性相关还是线性无关而定. 所以(1)的所有的解基本上以相同的快慢振荡，意思就是，在一个给定的区间内，任一解的零点数目与任何其他解的零点数目相差不超过 1. 另一方面，

$$y''+4y=0 \tag{2}$$

的解显然比

$$y''+y=0 \tag{3}$$

的解振荡得快，也就是前者在同一区间内有较多的零点；因为(2)的一个解如 $y=\sin 2x$ 的诸零点之间距离，只有(3)的一个解 $y=\sin x$ 的零点距离的一半. 下面的结果——所谓斯图尔姆比较定理——说明这种性态是典型的，也就是，当 $q(x)$ 增大些，(1)的解就振荡得更快些.

定理B　设 $y(x)$ 及 $z(x)$ 为

$$y''+q(x)y=0$$

及

① 这里我们利用了高等微积分里的波尔查诺-维尔斯特拉斯定理 (Bolzano-Weierstrass Theorem)，它所叙述的是实数系的基本拓扑性质之一.

$$z''+r(x)z=0$$

的非平凡解，其中 $q(x)$ 及 $r(x)$ 是适合 $q(x)>r(x)$ 的两个正值函数，则在 $z(x)$ 的任何两个相邻零点之间，$y(x)$至少有一次等于 0.

证明 设 x_1 及 x_2 是 $z(x)$ 的相邻二零点，从而有 $z(x_1)=z(x_2)=0$，且 $z(x)$在开区间(x_1,x_2)上不等于 0．现假定 $y(x)$ 在(x_1, x_2)上也不等于 0，然后由此引出矛盾而证明本定理．显然，若设 $y(x)$及 $z(x)$在(x_1, x_2)上都是正的，这并不使问题丧失一般性，因若有必要，哪一个函数都可以换成它的负函数．若把朗氏式

$$W(y,z)=y(x)z'(x)-z(x)y'(x)$$

写成$W(x)$以强调指出它是 x 的函数，则在(x_1,x_2)上

$$\frac{dW(x)}{dx}=yz''-zy''$$

$$=y(-rz)-z(-qy)$$

$$=(q-r)yz>0.$$

现在把不等式两边从 x_1 积分到 x_2，得到

$$W(x_2)-W(x_1)>0 \quad 或 \quad W(x_2)>W(x_1).$$

但在 x_1 及 x_2 处，朗氏式变成 $y(x)z'(x)$，故有

$$W(x_1)\geqslant 0 \quad 及 \quad W(x_2)\leqslant 0$$

而这就是所要引出的矛盾.

从这个定理可知，若方程(1)中的 $q(x)>k^2>0$，则它的任一个解必在方程 $y''+k^2y=0$ 的一个解 $y(x)=\sin k(x-x_0)$的相邻二零点之间等于 0，因而必在长度为 π/k 的任何区间内等于 0．例如，考察贝塞耳方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

的正规形式

$$u''+\left(1+\frac{1-4p^2}{4x^2}\right)u=0,$$

并把它同 $u''+u=0$ 进行比较，便立即得下面的定理.

定理C 若 $y_p(x)$ 是贝塞耳方程在正 x 轴上的非平凡解，若 $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}$，则在长度为 π 的每个区间里至少含有 $y_p(x)$ 的一个零点；若 $p=\frac{1}{2}$，则 $y_p(x)$ 的相邻二零点间的距离正好是 π；而若 $p>\frac{1}{2}$，则长度为 π 的每个区间里至多含有 $y_p(x)$ 的一个零点.

习 题

1. 设 x_1 及 x_2 是贝塞耳方程一个非平凡解 $y_p(x)$ 的相邻两个正的零点.
   a. 若 $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}$，试证 x_2-x_1 小于 π，并在 $x_1\to\infty$ 时这个差趋于 π.
   b. 若 $p>\frac{1}{2}$，试证 x_2-x_1 大于 π，并在 $x_1\to\infty$ 时它趋于 π.
2. 若 $y(x)$ 是 $y''+q(x)y=0$ 的非平凡解，试证当 $q(x)>k/x^2\ (k>1/4)$ 时 $y(x)$ 有无穷多个正零点，而当 $q(x)<1/4x^2$ 时只有有限个.
3. $y''+(\sin^2x+1)y=0$ 的每一个非平凡解都具有无穷多个正的零点. 试叙述一个定理能把这个命题作为它的特殊情形包括在内，并证明之.

24. 特征值，特征函数及振动弦

上面关于振荡性质的讨论为大致研究某些概念作了准备，这些概念从十八世纪中叶直至今日在分析中是很重要的.

先来求方程

$$y''+\lambda y=0 \tag{1}$$

的适合边值条件

$$y(0)=0 \quad 及 \quad y(\pi)=0 \tag{2}$$

的一个非平凡解 $y(x)$. (1) 中的参数 λ 能随便取任何实数值，我们的任务是要发现对于哪些 λ 值问题可解. 以前我们只考察了初值问题，那里求的是二阶方程的在自变量的一个值处满足两个条件的解. 这里情况完全不同，因我们想要在两个不同的 x 值处满足一个条件. 这类问题叫边值问题，一般它们(在理论上和实际上)比初值问题难，意义也更

深远.

但这里(1)及(2)所提出的问题并不难. 若 λ 是负数,则定理22-B告诉我们只有(1)的平凡解才能满足(2);若 $\lambda=0$, 则(1)的通解是 $y(x)=c_1x+c_2$, 结论仍如前. 因此可限于讨论 λ 是正数的情形, 这时(1)的通解是

$$y(x)=c_1\sin\sqrt{\lambda}x+c_2\cos\sqrt{\lambda}x;$$

而由于 $y(0)$ 必须等于 0, 上式记为

$$y(x)=c_1\sin\sqrt{\lambda}x. \tag{3}$$

故若这问题有解, 则解的形式必为(3). 如要满足第二个边值条件 $y(\pi)=0$, 则 $\sqrt{\lambda}\pi$ 显然必须等于 $n\pi$, 其中 n 为某个正整数, 故 $\lambda=n^2$. 换言之, λ 必须等于 1, 4, 9, …诸数之一. 这些 λ 值叫问题的特征值, 而相应的解

$$\sin x,\quad \sin 2x,\quad \sin 3x,\quad \cdots \tag{4}$$

则叫特征函数. 特征值显然是由问题唯一确定的, 但特征函数则不然; 因(4)的任何非零的常数倍, 如 $a_1\sin x, a_2\sin 2x, a_3\sin 3x, \cdots$ 也同样可以作为特征函数. 这里注意两件事实: 特征值形成一个渐增而趋于∞的数列; 第 n 个特征函数 $\sin nx$ 在区间$[0,\pi]$的端点处等于 0 而在该区间内部恰好有 $n-1$ 个零点.

现在来考察数学物理中的一个经典问题——振动弦的问题. 我们的目的是要了解特征值和特征函数是怎样产生的. 设有一根柔性弦拉紧在 x 轴上二固定点间, 为方便起见, 设这二点是 $x=0$ 及 $x=\pi$. 然后把弦拉向一侧形成 xy 平面的某一曲线 $y=f(x)$ (图 29) 再释手. 为

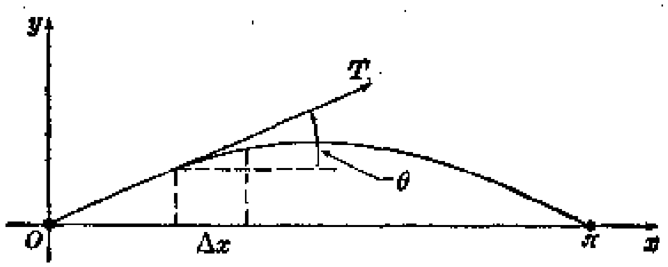


图 29

得出运动方程，作如下一些简化假设．首先假设所产生的振动纯是横振动．这表明弦上每一点的 x 坐标固定，因而它的 y 坐标只取决于 x 及时间 t．于是弦离开平衡位置的位移由某一函数 $y=y(x, t)$ 表示，其对时间的导数 $\partial y/\partial t$ 及 $\partial^2 y/\partial t^2$ 则表弦的速度及加速度．现在来考察

[illegible]

$$y(\pi, t)=0, \tag{10}$$

以及初始条件

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=0}=0 \tag{11}$$

与

$$y(x,0)=f(x). \tag{12}$$

条件(9)与(10)表示所设弦在点 $x=0$ 及点 $x=\pi$ 处永远固定；(11)及(12)表示释手时弦没有运动，而 $y=f(x)$ 是当时弦的形状．但这里要明确指出，所有这些条件都同(7)和(8)的推导毫无关系．

我们要用分离变量法来给出(8)的形式解．这就是求形式为

$$y(x, t)=u(x)v(t) \tag{13}$$

的解，它能分解为两个函数的乘积，其中每个函数只依赖于一个自变量．把(13)代入(8)，得到

$$a^2u''(x)v(t)=u(x)v''(t)$$

或

$$\frac{u''(x)}{u(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{v''(t)}{v(t)}. \tag{14}$$

因为左边是 x 的函数而右边是 t 的函数，所以方程(14)只有在两边都等于常数时才能成立．设把这常数记为 $-\lambda$，则(14)分成对 $u(x)$ 及 $v(t)$ 的两个常微分方程：

$$u''+\lambda u=0 \tag{15}$$

及

$$v''+\lambda a^2 v=0. \tag{16}$$

解出带边界条件 $u(0)=u(\pi)=0$ 的方程(15)，就可能满足(9)及(10)．我们已经看到，当且仅当 $\lambda=n^2$（n 为某个正整数）这问题有非平凡解，而且相应的解(特征函数)是

$$u_n(x)=\sin nx.$$

同样，相应于这些 λ (特征值)的(16)的通解是

$$v(t)=c_1\sin nat+c_2\cos nat;$$

若再加上条件 $v'(0)=0$ 以使(11)满足，则 $c_1=0$，得到解为

$$v_n(t)=\cos nat.$$

故相应的乘积形式(13)是

$$y_n(x,t)=\sin nx\cos nat.$$

当 $n=1,2,\cdots$ 时的每个这样的函数满足(8)及条件(9)，(10)及(11)；并且容易验证，这些 y_n 的常数倍的任何有限项之和

$$a_1\sin x\cos at+a_2\sin 2x\cos 2at+\cdots+a_n\sin nx\cos nat$$

也满足这些条件．如果形式地进行下去(也就是不管是否收敛，是否逐项可微等等一切问题)，则形式为

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx\cos nat=a_1\sin x\cos at+a_2\sin 2x\cos 2at+\cdots+a_n\sin nx\cos nat+\cdots \tag{17}$$

的任何一个无穷级数也是满足(9)，(10)及(11)的一个解．这就使我们接触到最后一个条件(12)，即当 $t=0$ 时，我们的解(17)应当给出弦的形状：

$$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx+\cdots \tag{18}$$

当丹尼尔·伯努利在 1755 年推出这些公式时，许多数学家认为除非 $f(x)$ 是某种很特殊类型的函数，(18)是不可能成立的．到下一世纪，事实证明这个意见是错误的，实际上对于在 0 及 π 处等于 0 的很广泛的各类函数 $f(x)$，(18)这种形式的表达式是成立的．现假定这一点成立，问题是要对给定的 $f(x)$ 求系数 a_n．这问题是欧拉在 1777 年解决的，他的解法揭开了福氏级数这个广泛的课题．我们将用适合于概念范围更广的方法，来求出这些系数．

特征函数 $u_m(x)=\sin mx$ 及 $u_n(x)=\cos nx$ 满足方程

$$u_m''=-m^2u_m \quad 及 \quad u_n''=-n^2u_n.$$

若以 u_n 乘第一式，以 u_m 乘第二式，并将所得结果相减，则得

$$u_nu_m''-u_mu_n''=(n^2-m^2)u_mu_n$$

或

$$(u_n u_m' - u_m u_n')' = (n^2 - m^2) u_m u_n. \tag{19}$$

把(19)两边从 0 积分到 π，并利用 $u_m(x) = \sin mx$ 及 $u_n(x) = \sin nx$ 在 0 及 π 处都等于 0 这个事实，得到

$$(n^2 - m^2)\int_0^\pi u_m(x) u_n(x) dx = \Big[u_n(x) u_m'(x) - u_m(x) u_n'(x)\Big]_0^\pi = 0$$

故当 $m \neq n$ 时，

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = 0 \tag{20}$$

这个结果提醒我们用 $\sin nx$ 遍乘(18)，然后逐项从 0 积分到 π. 做了这些运算之后，(20)使大批的项等于 0，最后只剩下

$$\int_0^\pi f(x) \sin nx dx = a_n \int_0^\pi \sin^2 nx dx;$$

而由于

$$\int_0^\pi \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2nx) dx = \frac{\pi}{2},$$

故得

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin nx dx. \tag{21}$$

这些 a_n 叫 $f(x)$ 的福氏系数，(21)叫欧拉公式. 用这些系数时，(18)叫 $f(x)$ 的福氏正弦级数，或 $f(x)$ 的以 $\sin nx$ 为特征函数的特征函数展开式，而(17)叫波动函数的伯努利解.

上述对波动方程的解法显然充满了可疑的步骤和许多未解决的问题，以致于从严密的观点说，只能把它看作是有点参考价值. 然而即使这样也值得一提，因为由此所产生的一些问题——特别是关于(18)的意义及其是否合法——是非常富于成果的. 例如，若用(21)算出系数 a_n，做出(18)右边的级数，则在什么条件下级数收敛？且若它在一点 x 处收敛，它是否一定收敛于 $f(x)$？这些问题及其解答是福氏级数理论

的主题①.

这里我们只对上述问题给出一个简略回答，而以后在这一套丛书②的另一本里再来详细论述这门内容丰富的分析分支.

所论函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \pi]$ 上且在端点处等于0. 设 $f(x)$ 在整个区间上连续，又其导数除可能有的有限多个跳跃间断点处解是连续的，而在跳跃间断点处，导数趋于有限的然而不同的左、右极限. 用几何语言讲，这种函数的图形是连续曲线，其切线沿曲线移动时，除了在有限个可能有的"角点"处方向发生突然变化外，切线方向也是连续变化的. 在这些条件下，展开式(18)是成立的：就是说，若 a_n 由(21)所定，则(18)右边的级数在每一点收敛于该点处的函数值. 这一命题是所谓福氏展开定理那个较一般定理的局限形式. 之所以需要有细致严密的理论，是出于如下的事实：若只假设 $f(x)$ 连续而不谈它的导数，则已知(18)右边的级数可能在某些点处是发散的.

研究工作的另一方向是考察对其它边值问题能否作象(18)那种特征函数展开. 如果不管这种展式是否合法，那末主要的问题就是要说明：在其它情形下我们是否具有足够的合适材料，即是否具有特征值序列及相应的特征函数能满足诸如(20)那样的条件.

举例说，假如我们考察上述振动弦，但其中有一重要不同之处：弦是不均匀的，即其密度 $m=m(x)$ 可因点而异. 在这情形下，(8)就变为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{m(x)}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{22}$$

若仍求(13)形式的解，则(22)变为

① 福里哀(Joseph Fourier, 1768—1830)，杰出数学物理学家，拿破仑之友并于1798随行去埃及. 回法后任东南部 Isère 地区行政长官，在其任期内修筑了从格勒诺布尔(Grenoble)到都灵(Turin)的第一条真正公路. 在这期间他从事热传导理论研究，并于1822年出版他的名著《热分析理论》(Thèorie Analytique de la Chaleur)，其中广泛运用了以其姓氏命名的级数. 不过他对这些级数的数学理论毫无贡献，并且这些级数也是他的前人欧拉，丹尼尔·伯努利，拉格伦日等人早已熟知的. 福里哀有一种怪想，以为沙漠的热是健康生活的理想环境，所以把住宅弄得过热并把他自己缠裹得像个木乃伊似的.

② 指"International Series in Pure and Applied Mathematics".——译者注

$$\frac{u''(x)}{m(x)u(x)}=\frac{1}{T}\frac{v''(t)}{v(t)};$$

并且仍同以前一样得出如下的边值问题：

$$u''+\lambda m(x)u=0,\qquad u(0)=u(\pi)=0. \tag{23}$$

这情形下的特征值和特征函数又是什么呢？显然，如果不确切知道密度函数 $m(x)$，这是不可能明确答复的．但至少我们能证明这些特征值和特征函数存在．详细论证可参看附录 A．

习　题

1. 求方程 $y''+\lambda y=0$ 在下列边界条件下的特征值 λ_n 及特征函数 $y_n(x)$：

   a. $y(0)=0,\ y(\pi/2)=0$;

   b. $y(0)=0,\ y(2\pi)=0$;

   c. $y(0)=0,\ y(1)=0$;

   d. $y(0)=0,\ y(L)=0$，其中 $L>0$;

   e. $y(-L)=0,\ y(L)=0$，其中 $L>0$;

   f. $y(a)=0,\ y(b)=0$，其中 $a<b$.

   按形式步骤（即不管纯数学性的问题，如函数是否可微以及级数是否收敛）求解下列二题．

2. 若 $y=F(x)$ 是一任意函数，则 $y=F(x+at)$ 表示一固定形状的波沿 x 轴往左移动，速度为 a（图 30）．同样，若 $y=G(x)$ 是另一任意函数，则 $y=G(x-at)$ 是向右的一个波，于是速度为 a 的最一般的一维波是

$$y(x,t)=F(x+at)+G(x-at). \tag{*}$$

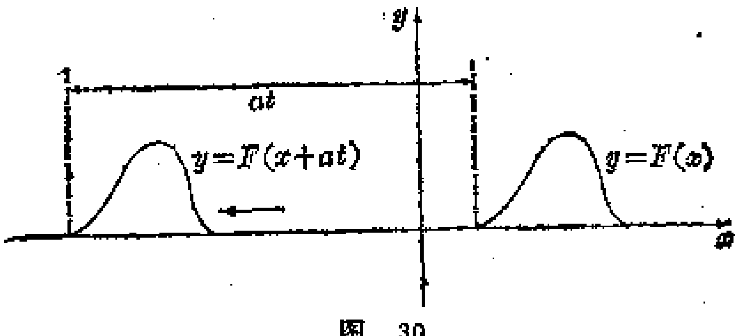


图　30

   a. 试证(*)满足波动方程(8)．

   b. 易知方程(8)中常数 a 具有速度的量纲．又，凭直觉显然知道，若一拉紧弦受干扰，波就会从干扰源出发朝两个方向移动．这些论点使我们想到引

入新变量 $\alpha=x+at$ 及 $\beta=x-at$. 试证, 用这两个作为新变量时, 方程(8)变成

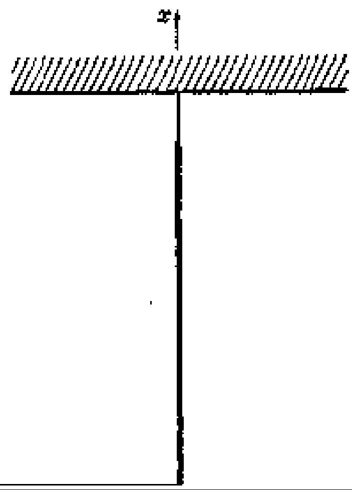
$$\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}=0,$$

并由此通过积分推出 (*). 公式(*) 叫波动方程的**达朗贝尔解**[①]. 欧拉也独立得出了这个解, 但较晚于达朗贝尔(两人都在 1747 年发现).

3. 设有一无穷长的弦拉紧在 x 轴上的 $-\infty$ 到 ∞ 之间. 设把弦拉向一侧形成曲线 $y=f(x)$ 然后松开, 并假定其后的弦振动由波动方程(8)描述.
   a. 用(*)试证弦的位移由**达朗贝尔公式**

$$y(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)] \qquad (**)$$

   给出. 提示: 利用初始条件(11)及(12).
   b. 再假定弦在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处不动 (这样的点叫**结点**), 从而有 $y(0, t)=y(\pi, t)=0$, 并用(**) 试证 $f(x)$ 是周期性奇函数, 其周期为 2π [即 $f(-x)=-f(x)$, 且 $f(x+2\pi)=f(x)$].
   c. 试证, 由于 $f(x)$ 是奇函数, 又是周期为 2π 的周期函数, 它必然在 0 及 π 处等于 0.
   d. 试证伯努利的解 (17) 可写成 (**) 的形式.
   提示: $2\sin nx\cos nat=\sin[n(x+at)]+\sin[n(x-at)]$.



4. 设有匀质柔软链, 密度为常数 m_0, 自其一端自由下悬. 若取坐标系如图 31 所示, 则当其受干扰時的横向振动由方程 (7) 所描述. 这时, 任

a. 假定这偏微分方程具有形如 $y(x,t)=u(x)v(t)$ 的解，试证 $u(x)$ 满足下列常微分方程：

$$\frac{d}{dx}\left(gx\frac{du}{dx}\right)+\lambda u=0. \tag{***}$$

b. 若将自变量 x 变换为 $z=2\sqrt{\lambda x/g}$，试证方程(***)变为

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{du}{dz}+zu=0,$$

这(虽然记法不同)就是贝塞耳方程 1-(9) 当 $p=0$ 时的特殊情形。

附录 A. 正则的斯图尔姆-利乌维勒问题

特征值、特征函数及特征函数展开的一般理论，是近世数学中最深刻、内容最丰富的理论之一. 本附录里只讲这个大问题的一小片段，但也是重要的片段. 我们的主要目的是证明形如 24-(23) 的任何边值问题(由非均匀振动弦所引起)具有特征值与特征函数，它们的性质与第24节中所遇到的相似. 做到这一点之后，就可发现只要换一下变量，便可把这个结果推广到在相当程度上更为一般的问题上去。

先从斯图尔姆比较定理推出几个易知的结论。

引理 1 设 $y(x)$ 及 $z(x)$ 是

$$y''+q(x)y=0$$

及

$$z''+r(x)z=0$$

的非平凡解，其中 $q(x)$ 及 $r(x)$ 是正值连续函数且 $q(x)>r(x)$①. 设 $y(x)$ 及 $z(x)$ 都在点 b_0 处等于 0，且 $z(x)$ 在 b_0 右边有为数有限或无穷的先后相继的零点 b_1, b_2, …, b_n, …. 则在每一闭区间 $[b_0, b_n]$ 内 $y(x)$ 至少有同 $z(x)$ 一样多的零点；且若 $y(x)$ 在 b_0 右边的相继零点为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，则对于每个 n 有 $a_n<b_n$.

证明 据斯图尔姆比较定理(定理 23-B)，$y(x)$ 在每个开区间 (b_0, b_1)，

---

① 在这以前，我们默认作为系数的函数都有连续性. 现在明确提出了连续性这一假定，因为下面引理 3 的证明要明确依赖于正值连续函数在闭区间上的某些性质.

$(b_1, b_2), \cdots, (b_{n-1}, b_n)$里至少有一个零点，由此立即得出引理中的两个结论.

引理 2 设$q(x)$是在闭区间$[a, b]$上满足不等式

$$0<m^2<q(x)<M^2$$

的正值连续函数. 若$y(x)$是方程$y''+q(x)y=0$在这一区间上的非平凡解，且若x_1及x_2是$y(x)$的两个相邻零点，则

$$\frac{\pi}{M}<x_2-x_1<\frac{\pi}{m}. \tag{1}$$

而且，若$y(x)$在a及b等于0，并在开区间(a, b)内$n-1$个点处等于0，则

$$\frac{m(b-a)}{\pi}<n<\frac{M(b-a)}{\pi}. \tag{2}$$

证明 为证(1)，先把所给方程同$z''+m^2z=0$比较. 这个方程的在x_1处等于0的一个非平凡解是$z(x)=\sin m(x-x_1)$. 因$z(x)$的第二个零点是$x_1+\pi/m$，而定理 23-B 告诉我们x_2必定出现在这之前，故$x_2<x_1+\pi/m$或$x_2-x_1<\dfrac{\pi}{m}$. 同样的论证使我们得出(1)的另一个不等式.

为证(2)，先指出在$n+1$个零点之间有n个子区间，故由(1)知：$b-a=n$个子区间的长度和$<n(\pi/m)$，因此$m(b-a)/\pi<n$. 同样可知$b-a>n(\pi/M)$，故$n<M(b-a)/\pi$.

我们的主要初步结果是下面的引理.

引理 3 设$q(x)$是正值连续函数，并在闭区间$[a, b]$上考察微分方程

$$y''+\lambda q(x)y=0. \tag{3}$$

对于每个λ，设$y_\lambda(x)$是方程(3)的满足初始条件$y_\lambda(a)=0$及$y'_\lambda(a)=1$的唯一解. 那时存在渐增的正数列

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots,$$

它$\to\infty$且具有下列性质：当且仅当λ等于这些λ_n之一时$y_\lambda(b)=0$. 又，函数$y_{\lambda_n}(x)$在开区间(a, b)里恰好有$n-1$个零点.

证明 由定理 22-B，$y_\lambda(x)$当$\lambda\leqslant 0$时显然没有位于a右边的零点. 我

们的计划是观察 $y_\lambda(x)$ 在 λ 从 0 增大时的振荡性. 我们首先指出, 根据 $q(x)$的连续性, 必存在二正数 m 及 M, 使在$[a,b]$上有 $0<m^2<q(x)<M^2$. 于是(按第 23 节中明确指出的意义)$y_\lambda(x)$在$[a, b]$上振荡得比

$$y''+\lambda m^2y=0$$

的解快, 但比

$$y''+\lambda M^2y=0$$

的解慢. 据引理 2, 当 λ 为小的正数$\left(小到使\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}M}\geqslant b-a\right)$时, 函数 $y_\lambda(x)$在$[a, b]$中 a 的右边没有零点; 而当 λ 增大到使 $\pi/\sqrt{\lambda}m\leqslant b-a$ 时, 则 $y_\lambda(x)$至少有一个这样的零点. 同样, 当 λ 增大到∞, $y_\lambda(x)$在$[a,b]$中的零点数目$\to\infty$. 于是从引理 1 知 $y_\lambda(x)$的在 a 右边的第 n 个零点随 λ 的增大而向左移, 而且我们可以认为(这是能够证明的)这个零点是连续移动的. 因此, 当 λ 从 0 开始增向∞时, 存在无穷多的值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$, 使 $y_\lambda(x)$的一个零点移到 b 处并终于进入区间内, 从而使 $y_{\lambda_n}(x)$ 在 a 及 b 等于 0 且在(a,b)内有 $n-1$ 个零点. 为证明数列 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$趋于$\infty$, 我们求助于不等式(2), 这时它的形式是

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}m(b-a)}{\pi}<n<\frac{\sqrt{\lambda_n}M(b-a)}{\pi}.$$

或

$$\frac{n^2\pi^2}{M^2(b-a)^2}<\lambda_n<\frac{n^2\pi^2}{m^2(b-a)^2}.$$

方程(3)是**斯图尔姆-刘维尔方程**

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda q(x)y=0 \tag{4}$$

在 $p(x)=1$ 时的特例. 这里我们假定 $p(x)$ 及 $q(x)$ 是$[a, b]$上的正值连续函数, 并设 $p(x)$ 在这个区间上有连续导数. 如果把(4)中的自变量从 x 变到新变量 w, 即定义 w 为

方程

$$w(x)=\int_a^x \frac{dt}{p(t)},$$

从而有

$$\frac{dw}{dx}=\frac{1}{p(x)}, \quad 及 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx}=\frac{1}{p(x)}\frac{dy}{dw},$$

则(4)的形式变为

$$\frac{d^2y}{dw^2}+\lambda q_1(w)y=0, \tag{5}$$

其中 $q_1(w)$ 是变换后的区间 $0 \leqslant w \leqslant c=w(b)$ 上的正值连续函数. 对方程(5)应用引理 3，立即得出下列关于(4)的命题.

定理 A 考察边值问题

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda q(x)y=0, \quad y(a)=y(b)=0, \tag{6}$$

其中 $p(x)$ 及 $q(x)$ 满足前述条件. 于是存在一个渐增的正数列

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots,$$

它趋于∞且有下列性质: 当且仅当 λ 等于 λ_n 之一时, (6)具有一个非平凡解. 相应于 $\lambda=\lambda_n$ 的那个解除了一个任意常数因子外是唯一确定的, 并在开区间 (a,b) 内恰好有 $n-1$ 个零点.

这些数 λ_n 叫问题(6)的特征值, 相应的解 $y_n(x)$ 叫特征函数. 因此我们有

$$\frac{d}{dx}\left[p\frac{dy_m}{dx}\right]+\lambda_m q y_m=0$$

及

$$\frac{d}{dx}\left[p\frac{dy_n}{dx}\right]+\lambda_n q y_n=0.$$

分别以 y_n 及 y_m 乘上面二式然后相减, 得到

$$\frac{d}{dx}\left[p\left(y_n\frac{dy_m}{dx}-y_m\frac{dy_n}{dx}\right)\right]+(\lambda_m-\lambda_n)qy_my_n=0.$$

从 a 到 b 积分后, 得到

$$\left[p\left(y_n\frac{dy_m}{dx}-y_m\frac{dy_n}{dx}\right)\right]_a^b+(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b qy_my_ndx=0.$$

由于 $y_m(x)$ 及 $y_n(x)$ 都在 a 及 b 处等于 0，故左边第一项等于 0，而有

$$\int_a^b qy_my_ndx=0,\quad 当\ m\neq n\ 时. \tag{7}$$

这些计算证明了以下的定理.

定理 B　边值问题(6)的特征函数满足关系式(7).

这定理的内容通常叙述为：特征函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$, $\cdots$, 在区间$[a, b]$上对于权函数 $q(x)$ 是正交的. 特别是，如同我们在第 24 节中所看到的，函数

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \sin nx,\ \cdots \tag{8}$$

是边值问题 $y''+\lambda y=0$, $y(0)=y(\pi)=0$ 的特征函数，因此在区间$[0, \pi]$上对于权函数 1 是正交的.

正如函数(8)可以作为基底，将在 0 及 π 处等于 0 的一个函数展为福氏正弦级数一样，(6)的特征函数也可用来作为基底，得出一个函数 $f(x)$(它满足 $f(a)=f(b)=0$)的特征函数展开式：

$$f(x)=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)+\cdots+a_ny_n(x)+\cdots. \tag{9}$$

若以 $q(x)y_n(x)$ 乘上式，并形式地逐项从 a 积分到 b，则利用(7)，可得第 n 个系数为

$$a_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_a^b q(x)y_n(x)f(x)dx,\qquad 其中\ \alpha_n=\int_a^b q(x)y_n(x)^2dx. \tag{10}$$

(9)这种形式的展开式(其中的系数由(10)给出)常叫做斯图尔姆-刘维尔展式. 这对很广泛的函数类是适用的，但这些问题的详细讨论超出本书范围.

最后需要提一件事. 我们通常称(6)为正则斯图尔姆-刘维尔问题，因其中区间是有限的，而函数 $p(x)$ 及 $q(x)$ 在整个区间上是正值连续的. 若区间为无穷，或区间虽为有限但 $p(x)$ 或 $q(x)$ 在端点之一或两端点处等于 0 或不连续，那就出现奇异问题. 这些问题要困难得多，当

然不是本附录的讨论所能涉及的. 遗憾的是，大多数最有意义的微分方程都属于这种奇异问题之列. 这里提一下勒让特方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0,\quad -1\leqslant x\leqslant 1;$$

契比雪夫方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}y=0,\quad -1<x<1;$$

厄尔米特方程

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda e^{-x^2}y=0,\quad -\infty<x<\infty;$$

和拉盖尔方程

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda e^{-x}y=0,\quad 0\leqslant x<\infty.$$

这些方程在第五章里还要出现，那里我们要用完全不同的观点对它们进行研究.

关于刘维尔的注记　刘维尔(Joseph Liouville, 1809—1882)是巴黎法兰西学院里一位极受尊重的教授，是十九世纪法国数学界起重要作用的《纯粹及应用数学学报》(Journal des Mathé matiques Pures et Appliquées)的创办人及编者. 但由于某种原因，他本人作为创造性数学家的杰出成就并未获得应有重视. 他的全集从未出版，这是他本国同胞一件令人遗憾而又颇为惊异的失着.

他是第一个通过求解等价积分方程以解边值问题的人，而积分方程在 1900 年代初期被弗雷德荷尔姆(Fredholm)及希尔柏脱(Hilbert)发展成为近世分析中的一大领域. 他那个关于分数阶微分法的巧妙理论答复了久久悬而未决的问题：记号 d^ny/dx^n 在 n 并非正整数时能赋予什么合理的意义. 他发现了复函数分析中的基本结果(现称为刘维尔定理)：有界整函数必然是常数，并以它为基础来建立他自己的椭圆函数论. 在哈米尔顿力学中也有一个著名的刘维尔定理，申明体积分是相空间中关于时间的不变量. 他对于初等函数的积分理论也许是其一切成就中最具有独创性的，因他在那个理论中证明象

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int\frac{e^x}{x}dx,\quad \int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\frac{dx}{\log x}$$

这类积分以及第一类与第二类椭圆积分，是不可能用有限个初等函数表达的①.

难搞而又引人入胜的超越数理论也是从刘维尔的工作开始的一个重要数学分支. π 和 e 是无理数（即这些数不是任何整系数线性方程 $ax+b=0$ 的根）这个结果已由兰伯特(Lambert)和欧拉在十八世纪作出证明. 1844年刘维尔证明 e 也不是任何整系数二次方程的根. 这使他猜测 e 是超越数，即它不能满足任何整系数多项式方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0.$$

他想搞出证明的工作失败了，但他的想法对厄尔米特在 1873 年的成功以及对林德曼 (Lindemann) 1882 年证明 π 也是超越数是有贡献的. 林德曼所获结果终于指出自古以来想用直尺圆规作正方形与圆等面积的问题是不可能的. 近世重大的数学成就之一是 1929 年盖尔方得(Gelfond)证明了 e^{π} 是超越数. 但对 $\pi-e$, πe 或 π^e 这类数的性质如何迄今还毫无所知. 刘维尔还发现了超越数的一个充分条件，并于 1844 年用之于列出一批可证明其超越性的实数，其中之一是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n!}}=\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^6}+\cdots=0.11000100\cdots$$

他在这里所用的方法，也在二十世纪引起了更广泛深入的研究②.

---

① 参看D. G. Mead在《美国数学月刊》(Am. Math. Monthly, vol 68, pp. 152—156, 1961)中的一文《Integration》. 关于进一步的详述可参看 G. H. Hardy 著《The Integration of Functions of a Single Variable》, Cambridge, London, 1916; 或 J. F. Ritt 著《Integration in Finite Terms》, Columbia, New York, 1948.

② 读者只要披阅一下A. O. Gelfond 著《Transcendental and Algebraic Numbers》(Dover, New York, 1960)一书，便可对这问题的艰深与复杂有所体会.

第五章　幂级数解及特殊函数

25. 引言. 幂级数复习

初等分析中所碰到的大多数特殊函数属于所谓初等函数. 为说明这一类函数, 我们先提出: 代数函数指的是一个多项式、有理函数或更一般地是任何函数 $y=f(x)$, 它满足形如

$$P_n(x)y^n+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\cdots+P_1(x)y+P_0(x)=0$$

的一个方程, 其中 $P_i(x)$ 是多项式. 初等函数包括: 代数函数; 微积分中所遇到的初等超越(或非代数)函数(即三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数); 以及由这些函数的加、减、乘、除以及取函数的函数所形成的一切其他函数. 例如

$$y=\tan\left[\frac{xe^{1/x}+\tan^{-1}(1+x^2)}{\sin x\cos 2x-\sqrt{\log x}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

就是一个初等函数.

初等函数以外有高等超越函数或常称为特殊函数. 自从十八世纪初以来, 曾认为有几百种特殊函数是足够重要或饶有兴趣, 值得加以一定程度的研究. 这些函数大部分几乎被人完全遗忘, 但有些函数如嘎马(gamma)函数, 黎曼 ζ 函数, 椭圆函数以及在数学物理中仍然有用的那些函数, 都产生了广泛的理论. 其中有少数几个, 意义如此丰富, 影响如此之大, 单是论述其中之一的历史就是满满的一大卷书①.

特殊函数这个领域曾为十八及十九世纪许多最伟大的数学家热心专诚地研究过, 其中包括欧拉、高斯、阿倍耳、雅可比、维尔斯特拉斯、黎曼、厄尔米特、庞加莱. 但风气是随着时代而改变的, 现今大多数数学家喜欢研究范围很广泛的函数类(连续函数、可积函数等等), 而不搞突

---

① 读者如想对这部分分析范围之广有个印象, 最好去参阅一下三大卷的《高等超越函数》("Higher Transcendertal Functions", A. Erdelyi(ed.), McGraw-Hill, New York, 1953—1955).

出个别的函数。然而仍然有许多数学家对传记的爱好超过社会学，因此要不偏不倚地来讲授分析，两种观点都不能偏废。

特殊函数的来源、性质和用场相差颇为悬殊，然而有一大批特殊函数具有相当程度的统一性，这就是作为二阶线性微分方程的解所产生的特殊函数，其中有好些对于数学物理中的偏微分方程都是用得着的。通过正交展开理论，它们作为线性分析的主要历史来源也有其重要性，而线性分析在形成现代纯粹数学方面是起了核心作用的。

现在我们想从总的方面来了解一下这些函数是怎样产生出来的。我们记得，如果想解简单的方程

$$y''+y=0, \tag{1}$$

那末初等微积分里已经有熟悉的函数 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 可以作为解。对于方程

$$xy''+y'+xy=0 \tag{2}$$

来说，情况就大不一样，因为这方程不能用初等函数解出。事实上，我们还不知道有哪一类二阶线性方程(除了常系数的或置换自变量后可化为常系数的那类方程)是能用初等函数解出的。在第四章里我们知道，对于这样一个方程，它的解的某些一般性质常常可以确定，而根本不需要解出方程。但若这类方程中有某个特殊的，它看起来足够重要，必需有某种显式解才行，那我们怎么办？本章所讲的方法是用幂级数来解出，并以这些级数来定义新的特殊函数。然后我们通过它们的级数展式来研究这些函数的性质。如果我们能够对它们获得足够多的知识，它们就取得“熟知函数”的资格，就可作为工具用来研究当初引出那个微分方程的实际问题。当然，这套步骤说起来容易，做起来并不容易，并且也只有在所论函数有许多重要应用的情况下才值得这样去做。

A. 形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \tag{3}$$

的无穷级数叫 x 的幂级数. 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \tag{4}$$

叫 $x-x_0$ 的幂级数, 而且似乎比(3)更一般些. 但若把 $x-x_0$ 换成 x(这不过是作一次坐标轴的平移), (4)总能化成(3), 因此以下的讨论大抵限于(3)这种形式的幂级数.

B. 我们说级数(3)在一点 x 处收敛, 如果极限

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n x^n$$

存在, 这时极限就是级数的和. 显然, (3)在点 $x=0$ 总是收敛的. 按其收敛点的分布情况, 所有幂级数可分为三大类, 其典型例子如下:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots; \tag{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots; \tag{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots. \tag{7}$$

第一个级数对一切 $x\neq 0$ 发散(即不收敛); 第二个对一切 x 收敛; 第三个对 $|x|<1$ 收敛而对 $|x|>1$ 发散. 有些 x 的幂级数性质象(5), 只对 $x=0$ 收敛. 对这些级数我们不感兴趣. 有些级数象(6)对一切 x 收敛. 这些级数最好办. 所有其他幂级数的性质多少有点像(7). 就是说, 对于每个这样的级数, 相应有一个正的实数 R, 叫收敛半径, 它使级数在 $|x|<R$ 时收敛而在 $|x|>R$ 时发散[就(7)的情形而论, $R=1$].

当级数只对 $x=0$ 收敛时, 我们通常说 R 等于 0, 而当级数对所有 x 收敛时, 则说 R 等于 ∞. 作了这样的约定后, 就可以用一句话来概括所有可能的情形: 每个 x 的幂级数具有收敛半径 R, 其中 $0\leqslant R\leqslant\infty$, 使级数在 $|x|<R$ 时收敛而在 $|x|>R$ 时发散. 应该指出的是, 若 $R=0$,

则没有 x 值能满足 $|x|<R$, 而若 $R=\infty$, 也没有 x 值能满足 $|x|>R$.

对于许多重要的情况而言, 可用下法求得 R 值. 令

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

是个非零的常数项级数. 在初等微积分里我们记得, 若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$$

存在, 那末这个比值检定法告诉我们: 级数在 $L<1$ 时收敛而在 $L>1$ 时发散. 就我们的幂级数(3)而论, 这告诉我们, 若每个 $a_n\neq 0$, 且若对于一个固定点 $x\neq 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = L,$$

则 (3) 在 $L<1$ 时收敛而在 $L>1$ 时发散. 根据这些条件, 我们得出公式

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{如果极限存在的话.}$$

(若 $|a_n/a_{n+1}|\to\infty$, 则设 $R=\infty$). 不管这公式能否使用, 我们知道 R 总是存在的; 若 R 有限且异于 0, 那末它就定出一个收敛区间 $-R<x<R$, 使级数在区间内收敛而在区间外发散. 一个幂级数在其收敛区间的一个或两个端点处可能收敛也可能不收敛.

C. 假如(3)对 $|x|<R(R>0)$ 收敛, 并把它的和记为 $f(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \tag{8}$$

则对于 $|x|<R$, $f(x)$ 自然连续而且具有一切阶的导数. 又级数可逐项微分, 即

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots,$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \cdots,$$

等等，并且微分后的每个级数都对 $|x|<R$ 收敛．这些逐项微分后的级数使我们得出一个基本公式，它给出了系数 a_n 与 $f(x)$ 及其各阶导数之间的关系：

$$a_n=\frac{f^n(0)}{n!}. \tag{9}$$

又，下面这一事实也常常有用：级数(8)可逐项积分，如果积分限都在收敛区间以内的话．

如果另有一个 x 的幂级数，它在 $|x|<R$ 时收敛于函数 $g(x)$，从而有

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots, \tag{10}$$

则(8)与(10)可以逐项加减：

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+\cdots.$$

它们也可以象多项式似地彼此相乘，即

$$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

其中 $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$①．如果出现两个级数收敛于同一函数的情形，即对于 $|x|<R$ 有 $f(x)=g(x)$，则从公式 (9)可知那时这两级数为有相同的系数：$a_0=b_0, a_1=b_1, \cdots$．特别是，若 $|x|<R$ 时 $f(x)=0$，则 $a_0=0, a_1=0, \cdots$．

D．设 $f(x)$ 对 $|x|<R(R>0)$ 是连续函数并具有各阶导数．问 $f(x)$ 能否用幂级数表示？若用(9)来定义系数 a_n，则自然会想到展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots \tag{11}$$

① 这里指出 c_n 的两种等价写法供以后使用：

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k} \quad 及 \quad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k.$$

将在整个区间成立．这通常总是事实，但遗憾的是有时并不成立．要考察这个展式对区间内特定一点 x 是否确实成立，有一种方法是利用台劳公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x)$ 的式子是

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1},$$

而 $\bar{x}$ 在 0 与 x 之间．为证明(11)成立，只要证明 $n\to\infty$ 时 $R_n(x)\to 0$ 即可．按照这种方式，容易得出下面几个熟知的展式，它们是对一切 x 都成立的：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots;\tag{12}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots;\tag{13}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots.\tag{14}$$

如果有一特定的收敛幂级数摆在我们面前，我们怎能看出它的和是个什么样的函数呢？一般说这是做不到的，因为只有极少数幂级数的和才是普通初等函数．

E．一函数 $f(x)$若具有这样性质：在点 x_0 的某邻域内形式为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\tag{15}$$

的幂级数展开式成立，便说它在 x_0 处是解析的．这时 a_n 必由

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

给出，而(15)便叫 $f(x)$ 在x_0 的台劳级数．于是(12)，(13)及(14)告诉我们 e^x，$\sin x$ 及 $\cos x$ 在 $x_0=0$ 处是解析的，而所给级数则是这些函数

在 $x_0=0$ 的台劳级数．关于函数是否为解析的问题，大抵可根据下面的事实来作出回答：

1．多项式及函数 e^x, $\sin x$, $\cos x$ 是在所有点处解析的．
2．若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 x_0 解析，则 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ 以及 $f(x)/g(x)$[若 $g(x_0)\neq 0$]也都在 x_0 解析．
3．若 $f(x)$在 x_0 解析．且 $f^{-1}(x)$是连续的反函数，则当 $f'(x_0)\neq 0$ 时 $f^{-1}(x)$ 在 $f(x_0)$处是解析的．
4．若 $g(x)$ 在 x_0 解析，且 $f(x)$ 在 $g(x_0)$解析，则 $f(g(x))$在 x_0 解析．
5．幂级数之和在收敛区间内所有点处是解析的．

上述命题有些能用初等方法证明，有些不能．一般说，解析函数的性态只有在复变函数论的较大范围内才能得到充分理解．

习　题

1．试用比值检验法验证对于级数(5)，(6)及(7)来说，$R=0$，$R=\infty$及 $R=1$．

2．若 p 不等于 0 或正整数，试证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n$$

对 $|x|<1$ 收敛而对 $|x|>1$ 发散．

3．试证对于展开式(13)及(14)右边级数来说，$R=\infty$．

4．用台劳公式证明展开式(12)，(13)及(14)对一切 x 成立．提示：$a^n/n!\to 0$ 对所有常数 a 成立(何故?)．

5．在初等代数中大家知道

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\quad (x\neq 1).$$

利用这结果试证展开式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

及

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

对$|x|<1$成立．又利用第二个展开式证明

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

及

$$\tan^{-1}x=x-x^3+x^5-x^7+\cdots$$

解. 一个幂级数在其收敛区间上可逐项微分，故

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \tag{3}$$

因 $y' = y$，故级数(2)及(3)必有相同系数：

$$a_1 = a_0,\quad 2a_2 = a_1,\quad 3a_3 = a_2,\quad \cdots,\quad (n+1)a_{n+1} = a_n,\quad \cdots.$$

有了这些方程，就可以用 a_0 来表示每个 a_n：

$$a_1 = a_0,\quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2},\ a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2\cdot 3},\ \cdots,\ a_n = \frac{a_0}{n!},\ \cdots.$$

把这些系数代入(2)后，便得幂级数解

$$y = a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right), \tag{4}$$

这里对a_0还没有加上什么条件. 必须清楚认识的是，这个解到目前还只是暂设的，因为我们不能保证(1)确实具有(2)这种形式的幂级数解. 以上的论证只是说明：如果(1)有这么一个解，那末那个解必然是(4). 但由比值检定法立即得知级数(4)对一切 x 收敛，故逐项微分是合法的，因而(4)确实是(1)的解. 在这个例子中，我们容易看出(4)中的级数是 e^x 的幂级数展开式，故(4)可写成

$$y = a_0 e^x.$$

当然，我们可以把(1)分离变量并积分，而直接得出这个解. 然而我们必须认识：即使(1)不能用初等方法求解，并且也看不出(4)是哪个熟知函数的展开式，(4)仍然是一个完全可靠的解.

这个例子提示了一个有用的方法，以求给定函数的幂级数展开式：求出函数所满足的微分方程，然后用幂级数解这方程.

例如我们来看函数

$$y = (1+x)^p, \tag{5}$$

其中 p 为一任意常数. 易知(5)是下列微分方程的指定特解：

$$(1+x)y' = py,\ y(0) = 1. \tag{6}$$

和前面一样，假定(6)具有一个幂级数解

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots, \tag{7}$$

共收敛半径 $R>0$. 由此得知

$$\begin{aligned}
y' &= a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots,\\
xy' &= \qquad a_1x+2a_2x^2+\cdots+\qquad na_nx^n+\cdots,\\
py &= pa_0+pa_1x+pa_2x^2+\cdots+\qquad pa_nx^n+\cdots.
\end{aligned}$$

根据方程(6),头两个级数之和应等于第三个级数. 故可令 x 的多次幂的系数分别相等,得到

$$a_1=pa_0,\quad 2a_2+a_1=pa_1,\quad 3a_3+2a_2=pa_2,\cdots,$$
$$(n+1)a_{n+1}+na_n=pa_n,\cdots.$$

由(6)中的初始条件推出 $a_0=1$, 故

$$a_1=p,\quad a_2=\frac{a_1(p-1)}{2}=\frac{p(p-1)}{2},$$

$$a_3=\frac{a_2(p-2)}{3}=\frac{p(p-1)(p-2)}{2\cdot 3},\cdots,$$

$$a_n=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!},\cdots.$$

代入这些系数后,(7)就变为

$$\begin{aligned}
y=1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3+\cdots\\
+\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n+\cdots.
\end{aligned}\tag{8}$$

为断定(8)确是所要的解, 只要指出这个级数对 $|x|<1$ 收敛就够了(参看习题 25-2). 比较(5)和(8)这两个解, 并利用(6)只有一个解这件事实, 便得

$$\begin{aligned}
(1+x)^p=1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\cdots\\
+\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n+\cdots
\end{aligned}\tag{9}$$

(对于 $|x|<1$). 这个结果叫做**二项级数**, 它把二项式定理推广到指数

为任意数的情形①。

习 题

1. 考察下列微分方程：

   a. $y'=2xy$;

   b. $y'+y=1$.

   对此二方程求形为 $\Sigma a_n x^n$ 的幂级数解，设法认出所得级数是一个常见函数的展开式，并通过对方程直接求解来核对你所作出的判断。

2. 考察下列微分方程：

   a. $xy'=y$;

   b. $x^2y'=y$.

   对此二方程求形如 $\Sigma a_n x^n$ 的幂级数解，同时对方程直接求解，并说明何以会出现不一致之处。

3. 通过以两种方法求解 $y'=(1-x^2)^{-1/2}$，将 $\sin^{-1}x$ 表为幂级数。(提示：用二项级数。)利用这个结果导出公式

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots.$$

4. 正文及以上各题中的微分方程都是线性的。方程

$$y'=1+y^2 \tag{*}$$

   是非线性的，并且容易直接看出 $y=\tan x$ 是 $y(0)=0$ 这一条件下的特解。通过假设方程(*)有幂级数形式 $\Sigma a_n x^n$ 的一个解并求出 a_n，试证

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots.$$

---

① 读者记得，初等代数中的二项式定理是：若 n 是正整数，则

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k+\cdots+x^n.$$

写成更简明的形式是

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,$$

其中**二项式系数** $\binom{n}{k}$ 的定义是

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

a. 按照正文例题中所讲的方法(特别注意方程的非线性性质如何使公式复杂化)；

b. 通过对方程(*)一再微分以求

$$y''=2yy',\quad y'''=2yy''+2(y')^2,\cdots,$$

并应用公式 $a_n=f^{(n)}(0)/n!$

5. 用题 4 中提出的每一种方法解方程

$$y'=x-y,\quad y(0)=0.$$

所得级数代表什么样的熟知函数？将所给一阶线性方程直接求解，以验证你的结论.

27. 二阶线性方程. 寻常点

现在来看一般齐次二阶线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0. \tag{1}$$

我们知道，这样的方程有时可用熟知的初等函数解出. 例如在 $P(x)$与 $Q(x)$ 是常数以及其他少数情形下可以这样做. 然而在大多数情形下，这一类在纯粹与应用数学中极为重要的方程是初等方法所不能解的，而只能用幂级数来求解.

关于方程(1)的核心事实是：它的解在一点 x_0 附近的性态依赖于作为系数的函数 $P(x)$及 $Q(x)$在该点附近的性态. 本节只限于讨论 $P(x)$及 $Q(x)$"性态很好"的情况，即它们在点 x_0 是解析的，也就是说每个函数在该点某邻域具有幂级数展开式. 这时x_0叫方程(1)的寻常点，并可发现方程的每个解在该点处也是解析的. 换言之，如(1)的系数在某点处是解析的，则可知它的解在该处也是解析的. 凡不是(1)的寻常点的点，叫做奇异点.

我们将要证明上文中的命题，但首先要考察几个说明问题的例子. 就熟知的方程

$$y''+y=0 \tag{2}$$

说，作为系数的函数是 $P(x)=0$ 及 $Q(x)=1$. 这两个函数是处处解析的，故可求形式为

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{3}$$

的一个解. 将(3)微分后得

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots \tag{4}$$

及

$$y''=2a_2+2\cdot3a_3x+3\cdot4a_4x^2+\cdots+(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\cdots. \tag{5}$$

若将(5)及(3)代入(2), 并把两个级数逐项相加, 得到

$$(2a_2+a_0)+(2\cdot3a_3+a_1)x+(3\cdot4a_4+a_2)x^2+(4\cdot5a_5+a_3)x^3+\cdots+[(n+1)(n+2)a_{n+2}+a_n]x^n+\cdots=0;$$

再使 x 的多次幂的系数等于零, 得到

$$2a_2+a_0=0,\ 2\cdot3a_3+a_1=0,\ 3\cdot4a_4+a_2=0,\ 4\cdot5a_5+a_3=0,\ \cdots,\ (n+1)(n+2)a_{n+2}+a_n=0,\ \cdots.$$

用这些方程, 便可以用 a_0 或 a_1 来表示 a_n(视 n 为偶数或奇数而定):

$$a_2=-\frac{a_0}{2},\quad a_3=-\frac{a_1}{2\cdot3},\quad a_4=-\frac{a_2}{3\cdot4}=\frac{a_0}{2\cdot3\cdot4},\quad a_5=-\frac{a_3}{4\cdot5}=\frac{a_1}{2\cdot3\cdot4\cdot5},\ \cdots.$$

有了这些系数, (3)就变为

$$y=a_0+a_1x-\frac{a_0}{2}x^2-\frac{a_1}{2\cdot3}x^3+\frac{a_0}{2\cdot3\cdot4}x^4+\frac{a_1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5-\cdots$$

$$=a_0\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right). \tag{6}$$

把括弧里的两个级数分别记为 $y_1(x)$及 $y_2(x)$. 我们通过形式计算证明(6)在 a_0 及a_1 为任何两个常数时满足(2). 若特别取 $a_0=1$ 及 $a_1=0$, 则知 y_1 满足(2); 若取 $a_0=0$ 及 $a_1=1$, 则知 y_2 也满足(2). 正如上节中的例子一样, 剩下的问题只是查明定义 y_1 及 y_2 的两个级数是否收敛. 但比值检验法的结果立即说明每个级数(从而级数(6)) 对一切 x 收敛(参看习题 25-3). 由此可知对(3)做的一切运算都合法, 故(6)是(2)的真正的解而并非仅属形式的解. 又 y_1 及 y_2 是线性无关的, 因为

哪一个级数显然都不是另一个级数的常数倍．于是我们知道(6)是(2)的通解，并可规定 $y(0)=a_0$ 及 $y'(0)=a_1$ 的值而得出任一个特解．

上例括弧里的两个级数容易看出是 $\cos x$ 及 $\sin x$ 的展开式，故(6)可写成

$$y=a_0\cos x+a_1\sin x.$$

自然，这个结论是一开头就能看出来的，因(2)是很简单的方程，它的解是我们完全熟悉的．但这只是偶然的巧合，因为用这种方法求出的大多数级数解不可能认出是什么函数的展开式，而代表了前所未知的函数．

作为说明这种情况的一个例子，我们用同一方法来解勒让特方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0, \tag{7}$$

其中 p 是一常数．作为系数的函数

$$P(x)=\frac{-2x}{1-x^2} \quad 及 \quad Q(x)=\frac{p(p+1)}{1-x^2} \tag{8}$$

在原点处显然是解析的．所以原点是个寻常点，我们可以预料解的形式是 $y=\sum a_n x^n$．由于 $y'=\sum(n+1)a_{n+1}x^n$，得方程(7)左边各项的展开式如下：

$$y''=\sum(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n,$$
$$-x^2y''=\sum-(n-1)na_nx^n$$
$$-2xy'=\sum-2na_nx^n,$$

及

$$p(p+1)y=\sum p(p+1)a_nx^n.$$

由方程(7)，这些级数之和必须是零，故 x^n 的系数对一切 n 必定是0：

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}-(n-1)na_n-2na_n+p(p+1)a_n=0.$$

稍加整理，上式变为

$$a_{n+2}=-\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n. \tag{9}$$

正如前面一个例子一样，我们可以用这个递推公式，将 a_n 表为 a_0 或 a_1 的式子（按照 n 是偶数或奇数）：

$$a_2=-\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}a_0,$$

$$a_3=-\frac{(p-1)(p+2)}{2\cdot 3}a_1,$$

$$a_4=-\frac{(p-2)(p+3)}{3\cdot 4}a_2=\frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}a_0,$$

$$a_5=-\frac{(p-3)(p+4)}{4\cdot 5}a_3=\frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}a_1,$$

$$a_6=-\frac{(p-4)(p+5)}{5\cdot 6}a_4=-\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}a_0,$$

$$a_7=-\frac{(p-5)(p+6)}{6\cdot 7}a_5$$

$$=-\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}a_1.$$

等等. 把这些系数代入所设解 $y=\Sigma a_n x^n$, 得到

$$\begin{aligned} y=a_0\Big[1&-\frac{p(p+1)}{2!}x^2+\frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4\\ &-\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}x^6+\cdots\Big]\\ &+a_1\Big[x-\frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3+\frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5\\ &-\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}x^7+\cdots\Big] \end{aligned} \tag{10}$$

作为(7)的形式解.

当 p 不是整数时, 方括号里两个级数的收敛半径都是 $R=1$. 这一点利用递推公式(9)最容易看出来: 对第一个级数说, 这个公式 (其中 n 换成 $2n$) 给出,

$$\left|\frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}}\right|=\left|-\frac{(p-2n)(p+2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\right||x|^2\to|x|^2 \quad (\text{当 } n\to\infty),$$

对第二个级数, 情况也相似. 同以前一样, 每个级数具有正的收敛半径这一事实, 说明所做运算都合理, 从而证明不管选择什么样的常数 a_0

及 a_1,(10)是(7)的一个真正的解. 方括号里的每个级数是一特解；又因这两个级数所定义的函数显然是线性无关的，所以(10)是(7)在区间 $|x|<1$ 上的通解.

(10) 所定义的函数叫勒让特函数，一般说它们不是初等函数. 但若 p 是非负的整数，则方括号里有一个级数是有末项的因而它是多项式(当 p 是偶数时这是第一个级数，当 p 是奇数时，这是第二个级数)，而另一个仍是无穷级数. 从这事实可知 (7) 有特解即所谓勒让特多项式，其性质和应用我们将在第六章中讨论.

现在用这些例子中的方法来建立下面的一般定理，即关于解在寻常点附近性质的定理.

定理A　设 x_0 是微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{11}$$

的一个寻常点，且设 a_0 及 a_1 是任意常数，则存在唯一的函数 $y(x)$，它在 x_0 解析，是(11)在该点某邻域的一个解，并满足初值条件 $y(x_0)=a_0$ 及 $y'(x_0)=a_1$. 又若 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 的幂级数展开式在一区间 $|x-x_0|<R$ $(R>0)$ 上成立，则这个解的展开式也在同一区间上成立.

证明　为方便起见，我们限于论证 $x_0=0$ 的情形. 这就使我们能用 x 的幂级数而不必用 $x-x_0$ 的幂级数，且不致真正有损于一般性. 作了这一点简化之后，定理中的所设条件就变为 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 在原点处解析，因而具有幂级数展开式:

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots \tag{12}$$

及

$$Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n=q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots, \tag{13}$$

它们在区间 $|x|<R(R>0)$ 上收敛. 现在根据初始条件设法求(11)的形式为下列幂级数的解:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots, \tag{14}$$

使它的收敛半径至少要等于 R. 微分(14)后, 得到

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots \tag{15}$$

及

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n=2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\cdots. \tag{16}$$

于是由幂级数相乘的法则, 得出

$$\begin{aligned}P(x)y'&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(k+1)a_{k+1}\right]x^n\end{aligned} \tag{17}$$

及

$$\begin{aligned}Q(x)y&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k\right)x^n.\end{aligned} \tag{18}$$

把(16), (17)及(18)代入(11)并把各级数逐项相加, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}+\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(k+1)a_{k+1}+\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k\right]x^n=0,$$

于是得到关于 a_n 的下列递推公式

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=-\sum_{k=0}^{n}[(k+1)p_{n-k}a_{k+1}+q_{n-k}a_k]. \tag{19}$$

对于 $n=0, 1, 2, \cdots$, 这个公式变为

$$2a_2=-(p_0a_1+q_0a_0),$$

$$2\cdot 3a_3=-(p_1a_1+2p_0a_2+q_1a_0+q_0a_1),$$

$$3\cdot 4a_4=-(p_2a_1+2p_1a_2+3p_0a_3+q_2a_0+q_1a_1+q_0a_2),$$

$$\cdots\cdots$$

这些公式把 $a_2, a_3, \cdots$ 表为 a_0 及 a_1 的式子，故由此得出的级数 (14)（它从形式运算上满足(11)及所给初始条件）是由这些条件唯一确定了的.

现设我们能证明级数(14)（其系数由公式(19)确定)确实对 $|x|<R$ 收敛. 于是根据幂级数的一般理论，可知使(14)满足(11)所做的那些形式运算（逐项微分、相乘以及逐项相加）是合理的，那样定理就证完. 这个论证并不容易. 我们把细节放在附录A里，如果读者不愿看，略过去也无妨.

最后有必要讲几句话. 在以上例子中，我们所碰到的未知级数解的系数，只是用所谓二项递推公式表示的. 由于这些公式简单，使所得级数的一般项颇易于确定，从而可以确切知道它们的收敛半径. 然而从公式(19)可以看出，在一般情况下不能指望式子都如此简单. 在大多数情形下，我们至多能求出 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 的级数展开式的收敛半径，并根据级数解的收敛半径至少同那两个中的较小者一样大这样一个定理来作推断. 例如，就勒让特方程说，从(8)以及熟知的展开式

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\cdots,\ R=1,$$

可以清楚看出 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 的 R 都等于 1. 因此无需进一步计算，就立即知道形式为 $y=\Sigma a_nx^n$ 的任一个解至少在区间 $|x|<1$ 上必然是真正的解.

习　　题

1. 用 x 的幂级数求 $(1+x^2)y''+2xy'-2y=0$ 的通解. 你能用初等函数表示这个解吗？
2. 考察方程 $y''+xy'+y=0$.
   a. 求其形式为 $y=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$ 的通解 $y=\Sigma a_nx^n$，其中 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 是幂级数.
   b. 用比值检定法试证 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 二级数对一切 x 收敛，如定理A所述

那样.

c. 试证 $y_1(x)$是 $e^{-x^2/2}$ 的级数展开式，并用这一事实按第 16 节的方法求第二个线性无关解，并说明有什么理由可以相信这第二个解就是(a)中所得的函数 $y_2(x)$.

3. 试证方程 $y''+y'-xy=0$ 有一个三项递推公式，并求它的级数解 $y_1(x)$及 $y_2(x)$, 使

a. $y_1(0)=1,\ \ y_1'(0)=0$;

b. $y_2(0)=0,\ \ y_2'(0)=1$.

定理 A 保证两个级数对一切 x 收敛. 注意这里如果直接从级数本身着手，这是多么难证的事.

4. 方程 $y''+\left(p+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2\right)y=0$($p$ 是一个常数) 肯定具有形如 $y=\Sigma a_nx^n$ 的级数解.

a. 试证系数 a_n间有下列三项递推关系式

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+\left(p+\frac{1}{2}\right)a_n-\frac{1}{4}a_{n-2}=0.$$

b. 若用 $y=we^{-x^2/4}$ 将因变量 y 变为 w, 试证方程可化为 $w''-xw'+pw=0$.

c. 试证(b)中的方程有一个二项递推公式并求其通解.

5. 艾礼方程 $y''+xy=0$ 的解叫艾礼函数, 它在衍射理论中有应用①.

a. 应用第 22 节中的定理，试证每个非平凡的艾礼函数有无穷多正的零点而至多只有一个负的零点.

b. 求幂级数形式的艾礼函数, 并直接证明这些级数对一切 x 收敛.

c. 用(b)中的结果, 不通过计算, 直接写出 $y''-xy=0$ 的通解.

6. 契比雪夫(Чебышёв)方程是

$$(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0,\ \ p \text{ 为常数}.$$

a. 求对于$|x|<1$ 成立的两个线性无关级数解.

b. 试证, 若 $p=n$(n 为$\geqslant 0$ 的整数)，则它具有一个解为 n 次多项式. 乘以合适的常数后，这种解叫契比雪夫多项式. 我们将在第 30 节的习题及附录

---

① 艾礼爵士(Sir George Biddel Airy, 1801—1892), 任英国皇家天文台长多年，是个办事勤恳有条理的实干家，他的礼让风格几乎剥夺了阿当姆斯 (J. C. Adams) 发现海王星的声誉. 艾礼幼年以善于制作豆丸枪(peashooter)这种玩具出名，并早年对光学理论有些贡献(他是最早指出所谓散光这种视力缺陷的人)，但后来却变成一个过于注重实用的科学家, 沉湎于繁复的数字计算, 而对一般的科学思想无所建树.

D 中重新提到它.

7. 厄尔米特方程是

$$y''-2xy'+2py=0,\quad p \text{ 为常数}.$$

a. 试证其通解为 $y(x)=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$，其中

$$y_1(x)=1-\frac{2p}{2!}x^2+\frac{2^2p(p-2)}{4!}x^4-\frac{2^3p(p-2)(p-4)}{6!}x^6+\cdots$$

及

$$y_2(x)=x-\frac{2(p-1)}{3!}x^3+\frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5-\frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7+\cdots$$

根据定理 A 这两个级数对一切 x 收敛. 试直接验证之.

b. 若 p 为非负整数，则级数中之一为有限项的即为一多项式(当 p 为偶数时这是 $y_1(x)$，p 为奇数时这是 $y_2(x)$)，而另一个仍是无穷级数. 试证对于 $p=0, 1, 2, 3, 4, 5$，这些多项式分别是 $1, x, 1-2x^2, x-\frac{2}{3}x^3, 1-4x^2+\frac{4}{3}x^4, x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5$.

c. 容易看出厄尔米特方程的多项式解都是 (b) 中所述那些多项式的常数倍. 这些常数倍多项式中，凡含 x 最高次乘幂项的形式为 2^nx^n 者记为 $H_n(x)$，它们叫厄尔米特多项式. 试验证 $H_0(x)=1, H_1(x)=2x, H_2(x)=4x^2-2, H_3(x)=8x^3-12x, H_4(x)=16x^4-48x^2+12$，以及 $H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$.

d. 验证(c)中所列举的多项式可由下列一般公式给出：

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

我们将在附录 B 中指出(d)中的公式如何从(a)中的级数推出，证明厄尔米多项式的一些最有用的性质，并简单说明这些多项式是怎样出现在量子力学的一个基本问题中的.

28. 正则奇异点

我们记得，一点 x_0 叫微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

的奇异点，如果作为系数的函数 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 之一(或两者)在 x_0 处不是解析的．在这情形下，上节所讲的定理和方法就不能用，而若要研究(1)的在 x_0 邻近的解，就需要有新的概念．这事在实践上相当重要，因为物理问题所引起的许多微分方程都有奇异点，而适应物理情况的解的选取常决定于它们在这些点附近处的性质．所以，虽然我们也许想避免微分方程的奇异点，但往往正是这些点需要给予特别的注意．举个简单的例子来说，原点显然是

$$y''+\frac{2}{x}y'-\frac{2}{x^2}y=0$$

的一个奇异点．容易验证，$y_1=x$ 及 $y_2=x^{-2}$ 是在 $x>0$ 上的线性无关

$$(x-1)P(x)=\frac{2x}{x+1} \text{ 及 } (x-1)^2Q(x)=-\frac{(x-1)p(p+1)}{x+1}$$

在 $x=1$ 是解析的，而第二个奇异点根据同样理由也是正则的. 另一个例子是 p 阶贝塞耳方程（p 为非负常数）：

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0. \tag{2}$$

若把此方程写为

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x^2-p^2}{x^2}y=0,$$

则显见原点是正则奇异点，因为

$$xP(x)=1 \quad \text{及} \quad x^2Q(x)=x^2-p^2$$

在 $x=0$ 处是解析的. 在本章以后部分，我们总拿贝塞耳方程为例来说明问题，而在第六章里我们要对它的解及其应用进行相当详细的讨论.

现在我们想讲一下为什么要这样来定义正则奇异点. 为使讲解简化，可设奇异点 x_0 在原点处；因为不然的话，只要把自变量从 x 换到 $x-x_0$，就总可以把它移到原点处. 我们的出发点是：在 $x=0$ 处解析的一个函数，具有一般形式 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$. 因此，若

$$P(x)=\cdots+\frac{b_{-2}}{x^2}+\frac{b_{-1}}{x}+b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$$

及

$$Q(x)=\cdots+\frac{c_{-2}}{x^2}+\frac{c_{-1}}{x}+c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots,$$

且具有负下标的系数中至少有一个不等于 0，则原点肯定是(1)的一个奇异点. 根据以后就会明白的理由，我们把(1)的所要得出的解设为“准幂级数”的形式

$$\begin{aligned} y&=x^m(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\\ &=a_0x^m+a_1x^{m+1}+a_2x^{m+2}+\cdots, \end{aligned} \tag{3}$$

这里指数 m 可以是个负整数、分数乃至一个实的无理数. 我们将在习题 6 及 7 中看出，只有当上述 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 的式子中所含常数项 b_0 及 c_0 左边的项，分别不多于其头一项及头两项，那才能有这样的两个线性

无关的解. 这个命题的另一种等价的说法是: $xP(x)$及 $x^2Q(x)$必须在原点处是解析的;而根据定义, 这恰好就是 $x=0$ 为正则奇异点一语所说的意思.

我们想要回答的第二个问题是: (3) 这种形式的级数可宜于作为方程(1)在正则奇异点 $x=0$ 附近的解, 这个想法是怎么来的? 在目前阶段,我们能够在奇异点附近完全解出的二阶线性方程,只有习题17-4中讨论过的欧拉方程

$$x^2y''+pxy'+qy=0. \tag{4}$$

若把它写成下面形式

$$y''+\frac{p}{x}y'+\frac{q}{x^2}y=0, \tag{5}$$

从而 $P(x)=p/x, Q(x)=q/x^2$,则当常数 p 及 q 不全为 0 时可知原点是个正则奇异点. 这个方程的解法是过渡到一般情形的很有启发性的桥梁, 所以我们要简略回顾一下其中的细节. 求出解的关键在于把自变量从 x 变到 $z=\log x$, 以把(4)变为一个常系数的方程. 做这一步变换时,假定 $x>0$ (这样 z 才是实变量)并写出

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{1}{x}$$

及

$$\begin{aligned}y''&=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy}{dz}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\\&=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}.\end{aligned}$$

将以上各式代入(4),得变换后的方程为

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(p-1)\frac{dy}{dz}+qy=0, \tag{6}$$

它的辅助方程是

$$m^2+(p-1)m+q=0. \tag{7}$$

若(7)的根是 m_1 及 m_2, 则知(6)有如下的线性无关解:

$$e^{m_1z} \quad 及 \quad e^{m_2z}\ (若\ m_2\neq m_1);$$

$$e^{m_1 z} \quad 及 \quad z e^{m_1 z} \quad (若\ m_2 = m_1).$$

由于 $e^z = x$，故(4)的相应两对线性无关解是

$$\begin{aligned} &x^{m_1} \quad 及 \quad x^{m_2} \qquad (若\ m_2 \neq m_1); \\ &x^{m_1} \quad 及 \quad x^{m_1}\log x \quad (若\ m_2 = m_1). \end{aligned} \tag{8}$$

若想求出在区间 $x<0$ 上成立的解，那只要把变量换成 $t=-x$，并求变换后的方程对于 $t>0$ 的解.

我们要在这里讨论欧拉方程和它的解有两方面的理由. 第一，我们指出，在原点处有一正则奇异点的最一般的微分方程，无非就是把方程(5)中的常数分子换成幂级数而已：

$$y'' + \left(\frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots}{x}\right) y' + \left(\frac{q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots}{x^2}\right) y = 0. \tag{9}$$

其次是，若把常数换成幂级数就能把(5)变成(9)，那就自然会猜想：相应地要把(8)变成(9)的解，可能只要把其中的幂函数 x^m 换成(3)那种形式的级数就行. 因此我们料想 (9) 会有两个形式如(3)的线性无关解，或者有一个形式如(3)而另一个形式如

$$y = x^m \log x (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \tag{10}$$

的解(其中我们假定 $x>0$). 下节中我们将证明这些猜想是很好的.

在结束这些一般性的论述以前，还必须最后讲一件事. 注意若在(3)及(10)这类式子中的 $a_0=0$，则可从幂级数部分中分解出 x 的一个正整数乘幂使其与 x^m 相结合. 所以我们总可以假定这类式子里的 $a_0 \neq 0$；而这一假定的意思只不过是说在进行任何计算以前，我们默认可能有的 x 最高乘幂因子已经分解出去. 形如 (3) 的级数叫**弗罗本尼乌斯级数**，而下述求出这类解的方法叫**弗罗本尼乌斯方法**①. 弗氏级数显然把幂级数作为其在 $m=0$ 或等于一正整数时的特殊情形包括

① 弗罗本尼乌斯(F. G. Frobenius, 1849—1917)曾在柏林与苏黎世执教，对微分方程及椭圆函数论作出过一些有价值的贡献. 然而他影响最大的工作是在代数方面，在那个领域里他发明并运用了解特征标这个重要概念，并证明关于复数系可能如何扩充的一个著名定理.

在内。

为用实例说明上述思想，我们来考察方程：

$$2x^2y''+x(2x+1)y'-y=0. \tag{11}$$

若将其写成更显眼的形式

$$y''+\frac{1/2+x}{x}y'+\frac{-1/2}{x^2}y=0, \tag{12}$$

便立即看出 $xP(x)=\frac{1}{2}+x$ 及 $x^2Q(x)=-\frac{1}{2}$，故知 $x=0$ 为一正则奇异点。现引入所设弗氏级数形式的解

$$\begin{aligned} y&=x^m(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\\ &=a_0x^m+a_1x^{m+1}+a_2x^{m+2}+\cdots, \end{aligned} \tag{13}$$

及其导数

$$y'=a_0mx^{m-1}+a_1(m+1)x^m+a_2(m+2)x^{m+1}+\cdots$$

及

$$\begin{aligned} y''=a_0m(m-1)x^{m-2}&+a_1(m+1)mx^{m-1}\\ &+a_2(m+2)(m+1)x^m+\cdots \end{aligned}$$

为求(13)中的诸系数，做法基本上同寻常点的情形一样，重要的区别是现在还必须求出指数 m 的(一个或几个)合适数值。当我们把上面三个级数代进(12)后，公因子 x^{m-2} 消掉，结果得到

$$\begin{aligned} a_0m(m-1)&+a_1(m+1)mx+a_2(m+2)(m+1)x^2+\cdots\\ &+\left(\frac{1}{2}+x\right)[a_0m+a_1(m+1)x+a_2(m+2)x^2+\cdots]\\ &-\frac{1}{2}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)=0. \end{aligned}$$

用观察法，将 x 的各同幂项合并，并使 x 的各次乘幂的系数等于0，得到下列方程组：

$$\begin{aligned} a_0\left[m(m-1)+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\right]&=0,\\ a_1\left[(m+1)m+\frac{1}{2}(m+1)-\frac{1}{2}\right]+a_0m&=0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$a_2\left[(m+2)(m+1)+\frac{1}{2}(m+2)-\frac{1}{2}\right]+a_1(m+1)=0,$$

$$\cdots\cdots$$

前面已经讲过，我们可默认 $a_0\neq 0$. 故从上面的第一个方程得到

$$m(m-1)+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}=0. \tag{15}$$

这叫微分方程(11)的**指数方程**(indicial equation). 它的根是

$$m_1=1 \quad 及 \quad m_2=-\frac{1}{2},$$

这些也就是(13)中指数 m 所可能取得的值. 现在对于每一个 m 值，利用(14)中的其余方程来算出 $a_1, a_2, \cdots$ 用 a_0 表达的式子. 对于 $m_1=1$, 我们有

$$a_1=-\frac{a_0}{2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{5}a_0,$$

$$a_2=\frac{2a_1}{3\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{7}a_1=\frac{4}{35}a_0,$$

$$\cdots\cdots$$

而对于 $m_2=-\frac{1}{2}$, 我们有

$$a_1=\frac{\frac{1}{2}a_0}{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=-a_0,$$

$$a_2=-\frac{\frac{1}{2}a_1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}a_0,$$

$$\cdots\cdots$$

于是得下面两个弗氏级数式的解，其中我们都令 $a_0=1$:

$$y_1=x\left(1-\frac{2}{5}x+\frac{4}{35}x^2+\cdots\right), \tag{16}$$

$$y_2=x^{-1/2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\right). \tag{17}$$

这两个解在 $x>0$ 时显然是线性无关的，故(11)在 $x>0$ 上的通解是

$$y=c_1x\left(1-\frac{2}{5}x+\frac{4}{35}x^2+\cdots\right)+c_2x^{-1/2}\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\right).$$

关于括弧里两个幂级数的收敛区间如何确定的问题，我们将在下节予以讨论.

若注意观察(15)是怎样从(12)得出来的，那就容易看出更一般的微分方程(9)的指数方程是

$$m(m-1)+mp_0+q_0=0. \tag{18}$$

在所举实例中，指数方程有两个不同实根，得出两个线性无关的级数解(16)及(17). 所以当指数方程(18)有不同实根 m_1 及 m_2 时，我们自然也料想会有这样的结果. 这种料想在 m_1 与 m_2 之差并非整数时是成立的. 但若这个差是一个整数，那末往往(但并非总是)有这种情形：所料想的两个级数解之一不存在. 在这情形下，正如在 $m_1=m_2$ 的情形那样，就必须通过其他方法求出第二个线性无关解. 在下一节里我们详细考察怎样来克服这些困难.

习　题

1. 对下列每个微分方程，找出它的奇异点在 x 轴上何处，并说明它是哪一类奇异点.
   a. $x^3(x-1)y''-2(x-1)y'+3xy=0$;
   b. $x^2(x^2-1)^2y''-x(1-x)y'+2y=0$;
   c. $x^2y''+(2-x)y'=0$;
   d. $(3x+1)xy''-(x+1)y'+2y=0$.
2. 对下列每个方程，确定 $x=0$ 点是什么性质的点：
   a. $y''+(\sin x)y=0$;
   b. $xy''+(\sin x)y=0$;
   c. $x^2y''+(\sin x)y=0$;
   d. $x^3y''+(\sin x)y=0$;
   e. $x^4y''+(\sin x)y=0$.
3. 对下列每个微分方程，求指数方程及其根：

a. $x^2y''+(\cos 2x-1)y'+2xy=0$;

b. $4x^2y''+(2x^4-5x)y'+(3x^2+2)y=0$.

4. 对下列每个方程，验证原点是个正则奇异点，并算出两个线性无关的弗氏级数解:

a. $4xy''+2y'+y=0$;

b. $2xy''+(3-x)y'-y=0$;

c. $2xy''+(x+1)y'+3y=0$;

d. $2x^2y''+xy'-(x+1)y=0$.

5. 在 $p=0$ 时，贝塞耳方程(2)变为

$$x^2y''+xy'+x^2y=0.$$

试证它的指数方程只有一个根，并用本节方法推出相应的弗氏级数解为(参看题 25-7 b):

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}.$$

6. 设有微分方程

$$y''+\frac{1}{x^2}y'-\frac{1}{x^3}y=0.$$

a. 试证 $x=0$ 是非正则奇异点.

b. 利用 $y_1=x$ 为其一个解的事实，用第 16 节所讲方法求第二个线性无关解 y_2.

c. 试证(b)所求出的第二个解 y_2 不能用弗氏级数表示.

7. 考察微分方程

$$y''+\frac{p}{x^b}y'+\frac{q}{x^c}y=0,$$

其中 p 及 q 是非 0 实数，而 b 及 c 为正整数. 若 $b>1$ 或 $c>2$，则 $x=0$ 显然为非正则奇异点.

a. 试证，若 $b=2$ 及 $c=3$，则 m 只可能有一个值，使相应的弗氏级数解存在.

b. 同样，试证当且仅当 $b=1$ 及 $c\leq 2$ 时 m 满足一个二次方程，从而可指望得出相应于方程两个根的两个弗氏级数解. 注意，这恰好就是规定 $x=0$ 是个"弱"奇异点或正则奇异点(而并非"强"的或即非正则的奇异点)的条件.

8. 微分方程

$$x^2y''+(3x-1)y'+y=0$$

以 $x=0$ 为一非正则奇异点. 若将(3)代入此方程，试证 $m=0$ 且其相应的弗

氏级数"解"为幂级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n,$$

它只在 $x=0$ 收敛. 这说明即使有一弗氏级数能形式地满足这样一个方程,它也未必是个真正的解.

29. 正则奇异点(续)

上一节里所讲的主要是来龙去脉和运算技巧. 现在要讲讲在正则奇异点 $x=0$ 附近,求解一般二阶线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

问题中的理论部分. 我们前面所贯彻的一套思想, 促使我们形式地去算(1)的任何一个具有弗氏形式的解

$$y=x^m(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots), \tag{2}$$

其中 $a_0\neq 0$ 而 m 是有待于确定的一个数. 我们希望照这样算出的任一个形式上的解, 能通过证明而合法化使之成为真正的解. 这样一种做法具有普遍意义, 它也有助于阐明当(1)只有一个象(2)那种形式的解时的情况①. 根据早已说过的理由, 我们只限于在区间 $x>0$ 上讨论. 我们只要把变量换成 $t=-x$ 然后在 $t>0$ 上解所得方程, 就可研究解在 $x<0$ 上的性态.

我们所假定的事是: $xP(x)$ 及 $x^2Q(x)$ 在 $x=0$ 为解析, 从而它们有幂级数展开式(对于 $|x|<R, R>0$, 成立)

$$xP(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n \quad 及 \quad x^2Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n. \tag{3}$$

同上节的实例一样, 我们必须求出(2)中的 m 可能取的那些值; 然后对于每个可以接受的 m 值来计算相应的系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$. 若把(2)写为

① 当我们说(1)只有一个象(2)那种形式的解时, 我们是指不存在这种形式的第二个线性无关解.

$$y=x^m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{m+n},$$

则微分后得到

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(m+n)x^{m+n-1}$$

及

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(m+n)(m+n-1)x^{m+n-2}$$

$$=x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(m+n)(m+n-1)x^n.$$

于是(1)中的 $P(x)y'$ 及 $Q(x)y$ 项可写为

$$P(x)y'=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(m+n)x^{m+n-1}\right]$$

$$=x^{m-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(m+n)x^n\right]$$

$$=x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}a_k(m+k)\right]x^n$$

$$=x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}p_{n-k}a_k(m+k)+p_0a_n(m+n)\right]x^n$$

及

$$Q(x)y=\frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{m+n}\right)$$

$$=x^{m-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)$$

$$=x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k\right)x^n$$

$$=x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}q_{n-k}a_k+q_0a_n\right)x^n.$$

把 y'', $P(x)y'$ 及 $Q(x)y$ 的这些式子代入(1)并去掉公因子 x^{m-2} 后，微分方程变为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0]$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}a_k[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}]\}x^n=0;$$

让 x^n 的系数等于 0，得出各 a_n 的下列递推公式

$$a_n[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0]$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}a_k[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}]=0. \quad (4)$$

对 n 的相继数值写出这一公式，得到

$$a_0[m(m-1)+mp_0+q_0]=0,$$
$$a_1[(m+1)m+(m+1)p_0+q_0]+a_0(mp_1+q_1)=0,$$
$$a_2[(m+2)(m+1)+(m+2)p_0+q_0]$$
$$+a_0(mp_2+q_2)+a_1[(m+1)p_1+q_1]=0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0]$$
$$+a_0(mp_n+q_n)+\cdots+a_{n-1}[(m+n-1)p_1$$
$$+q_1]=0.$$
$$\cdots\cdots$$

若设 $f(m)=m(m-1)+mp_0+q_0$，这些方程就变为

$$a_0f(m)=0,$$
$$a_1f(m+1)+a_0(mp_1+q_1)=0,$$
$$a_2f(m+2)+a_0(mp_2+q_2)+a_1[(m+1)p_1+q_1]=0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_nf(m+n)-a_0(mp_n+q_n)+\cdots+a_{n-1}[(m+n-1)p_1+q_1]=0,$$
$$\cdots\cdots$$

因 $a_0\neq0$，故由以上第一式得 $f(m)=0$，也就是

$$m(m-1)+mp_0+q_0=0. \tag{5}$$

这就是指数方程，它的根 m_1 及 m_2(它们是所设解(2)中 m 可能取的值)叫微分方程(1)在正则奇异点 $x=0$ 处的指数．往下各方程给出将 a_1 表为 a_0 的式子，将 a_2 表为 a_0 及 a_1 的式子等等．所以对于每一个选定的 m，就可把 a_n 确定为 a_0 的式子，除非对于某个正整数 n 有 $f(m+n)=0$，在这情形下，计算步骤就中断．例如，若 $m_1=m_2+n$ (对于某个整数 $n\geqslant 1$)，则选取 $m=m_1$ 就给出一个形式解，但一般说取 $m=m_2$ 就不然，因为 $f(m_2+n)=f(m_1)=0$．若 $m_1=m_2$，我们也只得出一个形式解．在 m_1 及 m_2 为实数的所有其他情形下，这一步骤能给出两个线性独立的形式解．当然，m_1 及 m_2 也可能是共轭复数，但我们不讨论这一情况，因为要作充分讨论的话，会使我们陷入过多的复函数分析．这里特别难办的一点是，若让 m 取复数，则 a_n 这些数也可以是复数，而我们不能假定读者熟悉复系数的幂级数．

这些思想在下列定理中叙述得更确切．

定理A 设 $x=0$ 是微分方程(1)的正则奇异点，且 $xP(x)$ 及 $x^2Q(x)$ 的幂级数展开式(3)在区间 $|x|<R(R>0)$ 上成立．设指数方程(5)具有实根 m_1 及 $m_2(m_2\leqslant m_1)$．那末方程(1)在区间 $0<x<R$ 上至少有一个解

$$y_1=x^{m_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad (a_0\neq 0), \tag{6}$$

其中 a_n 可由递推公式(4)用 a_0 表示而把公式中的 m 换成 m_1，且级数 Σa_nx^n 对于 $|x|<R$ 收敛．又若 m_1-m_2 不等于0或正整数，则方程(1)在同一区间上有第二个线性无关解

$$y_2=x^{m_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad (a_0\neq 0), \tag{7}$$

这里 a_n 仍可由递推公式(4)用 a_0 表示但公式中的 m 则换成 m_2，并且级数 Σa_nx^n 仍在 $|x|<R$ 上收敛．

鉴于已经证明的一切，现在只要在每一情形下证明级数 Σa_nx^n 在

区间$|x|<R$上收敛，这定理的证明就完成了．愿意知道这一论证细节的读者可参看附录A．我们要强调指出的是，在一个具体问题中，把一般弗氏级数(2)直接代入微分方程，比用递推公式(4)来计算系数要简便得多．这个递推公式的主要用途是在附录A中关于收敛性的微妙证明．

遗憾的是定理A对于差m_1-m_2为0或正整数的情形如何求第二个解的问题并未作出回答．为使读者初步了解这方面有哪些可能的情况，我们分三种情形来讨论．

情形A 若$m_1=m_2$，则不可能有第二个弗氏级数解．若在递推公式(4)中代入$m=m_2$并将其写为

$$a_n f(m_2+n)=-a_0(m_2p_n+q_n)-\cdots$$
$$a_{n-1}[(m_2+n-1)p_1+q_1], \qquad (8)$$

则m_1-m_2为正整数的其他两种情形就比较容易理解．我们知道计算a_n所产生的困难是由于对某个正整数n有$f(m_2+n)=0$．下面两种情形就处理这个问题．

情形B 若在$f(m_2+n)=0$时(8)式右边不等于0，那就不可能再有什么方法来继续计算系数，因而就不能存在第二个弗氏级数解．

情形C 若在$f(m_2+n)=0$时(8)的右边碰巧也等于0，那样a_n就没有限制而可指定为任何值．特别是可令$a_n=0$，继续计算系数而没有任何别的困难．因此在这情形下确实存在第二个弗氏级数解．

在下面的习题里可以看出这三种可能的情形确实都会出现．

我们可以从下面的计算发现，在m_1-m_2为0或正整数时，第二个级数会取什么样的形式．我们先定义一个正数k为$k=m_1-m_2+1$．指数方程(5)可写为

$$(m-m_1)(m-m_2)=m^2-(m_1+m_2)m+m_1m_2=0,$$

故若使m的系数相等，便得出$p_0-1=-(m_1+m_2)$或$m_2=1-p_0-m_1$，于是有$k=2m_1+p_0$．用第16节的方法，可从已知解$y_1=x^{m_1}(a_0+a_1x+\cdots)$求出第二解$y_2$，把$y_2$写为$y_2=vy_1$，其中

$$v'=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}=\frac{1}{x^{2m_1}(a_0+a_1x+\cdots)^2}e^{-\int\left(\frac{p_0}{x}+p_1+\cdots\right)dx}$$

$$=\frac{1}{x^{2m_1}(a_0+a_1x+\cdots)^2}e^{(-p_0\log x-p_1x-\cdots)}$$

$$=\frac{1}{x^k(a_0+a_1x+\cdots)^2}e^{(-p_1x-\cdots)}=\frac{1}{x^k}g(x).$$

上面最末等式所定义的函数 $g(x)$ 显然在 $x=0$ 处解析且有 $g(0)=1/a_0^2$，故在原点周围的某区间上有

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots,\quad b_0\neq 0. \tag{9}$$

由此得

$$v'=b_0x^{-k}+b_1x^{-k+1}+\cdots+b_{k-1}x^{-1}+b_k+\cdots,$$

故

$$v=\frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1}+\frac{b_1x^{-k+2}}{-k+2}+\cdots+b_{k-1}\log x+b_kx+\cdots$$

于是

$$y_2=y_1v=y_1\left(\frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1}+\cdots+b_{k-1}\log x+b_kx+\cdots\right)$$

$$=b_{k-1}y_1\log x+x^{m_1}(a_0+a_1x+\cdots)\left(\frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1}+\cdots\right).$$

若在最末括号里的级数中把因子 x^{-k+1} 提出来，利用 $m_1-k+1=m_2$ 这个关系，把两个幂级数相乘，得到第二个级数为

$$y_2=b_{k-1}y_1\log x+x^{m_2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \tag{10}$$

公式(10)作为实际工价值很少，但它确实提供几点情况. 第一，若指数 $m_1=m_2$，则 $k=1$，从而 $b_{k-1}=b_0\neq0$；所以在这情形下（这就是上面说的情形A）在第二个解(10)中肯定会有含 $\log x$ 的项. 但若 $m_1-m_2=k-1$ 是正态数，则有时 $b_{k-1}\neq0$ 因而有 $\log x$ 项（情形B），有时 $b_{k-1}=0$ 因而没有 $\log x$ 项(情形C). 这里的实际困难是我们不能够直接求出 b_k，因为没有什么直接计算(9)中系数的方法. 但不管怎样，我们至少知道，在情形A与B，当 $b_{k-1}\neq0$ 而弗氏方法只能部分奏效时，

第二个解的一般形式是

$$y_2=y_1\log x+x^{m_2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n, \tag{11}$$

其中 c_n 是些未知常数，它们可由直接把 (11) 代入微分方程后加以确定。注意这式子和公式 28-(10)相似但比较复杂一些。

习 题

1. 方程

$$x^2y''-3xy'+(4x+4)y=0$$

只有一个弗氏级数解，试求之。

2. 方程

$$4x^2y''-8x^2y'+(4x^2+1)y=0$$

只有一个弗氏级数解，试求通解。

3. 求下列多方程的两个线性无关弗氏级数解：

   a. $xy''+2y'+xy=0$;

   b. $x^2y''-x^2y'+(x^2-2)y=0$;

   c. $xy''-y'+4x^3y=0$.

4. $p=1$ 阶贝塞耳方程是

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0.$$

试证 $m_1-m_2=2$ 并证方程只有一个弗氏级数解，然后求出这个解。

5. $p=\frac{1}{2}$阶贝塞耳方程是

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0.$$

试证 $m_1-m_2=1$，但方程仍然有两个线性无关的弗氏级数解。然后求出这两个解。

6. $p=0$ 阶贝塞耳方程只有一个弗氏级数解，由习题28-5给出。取该解为 y_1，并把公式(11)代入微分方程，得第二个线性独立解为

$$y_2=y_1\log x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^{2n},$$

试验算之。

30. 高斯超几何方程

这个著名的微分方程是

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0, \tag{1}$$

其中 a，b，及 c 是常数．(1)中系数的写法似乎颇为奇特，但以后可看出这完全适合它的解在各种各样不同情况下的用法．要理解这一点，最好的方法是我们自己动手解这个方程，看看会出现什么情况．

我们有

$$P(x)=\frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)} \quad 及 \quad Q(x)=\frac{-ab}{x(1-x)},$$

故在 x 轴上只有 $x=0$ 及 $x=1$ 这两个奇异点．又

$$xP(x)=\frac{c-(a+b+1)x}{1-x}=[c-(a+b+1)x](1+x+x^2+\cdots)$$
$$=c+[c-(a+b+1)]x+\cdots$$

及

$$x^2Q(x)=\frac{-abx}{1-x}=-abx(1+x+x^2+\cdots)$$
$$=-abx-abx^2-\cdots,$$

故 $x=0$(相似地还有 $x=1$) 是个正则奇异点．这些展开式告诉我们 $p_0=c$ 及 $q_0=0$，故指数方程是

$$m(m-1)+mc=0 \quad 或 \quad m[m-(1-c)]=0,$$

于是指数为 $m_1=0$ 及 $m_2=1-c$．若 $1-c$ 不是正整数，换言之，若 c 不等于 0 或负整数，则定理 29-A 保证了(1)具有下列形式的解：

$$y=x^0\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,\ a_0\neq0. \tag{2}$$

把这代入(1)并让 x^n 的系数等于 0，得到 a_n 的下列递推公式：

$$a_{n+1}=\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}a_n. \tag{3}$$

现取 $a_0=1$ 并依次算出其后各 a_n

$$a_1=\frac{ab}{1\cdot c},\qquad a_2=\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2c(c+1)},$$

$$a_3=\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3c(c+1)(c+2)},\cdots.$$

把这些系数代入(2)，得到

$$\begin{aligned}y&=1+\frac{ab}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2c(c+1)}x^2\\&\quad+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}x^n\end{aligned}\tag{4}$$

这就是所谓超几何级数，记为 $F(a, b, c, x)$. 它之所以获得这个名称，是因为它按以下方式推广了熟知的几何级数：当 $a=1$ 及 $c=b$，得到

$$F(1, b, b, x)=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

若 a 或 b 等于 0 或负整数，级数(4)就到某一项中断，成为一多项式；否则的话，从比值检定法可知它对 $|x|<1$ 收敛，因由(3)给出

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\left|\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}\right||x|\to|x|\quad(\text{当 } n\to\infty).$$

这种收敛性也可以从最接近原点的奇异点是 $x=1$ 这一事实预料到. 因此，当 c 不等于 0 或负整数时，$F(a, b, c, x)$在区间 $|x|<1$ 上是个解析函数，名叫超几何函数. 这是超几何方程的最简单的特解. 超几何函数有很多特性，其中最容易看出的一个是，若 a 与 b 互换，则函数不变：$F(a, b, c, x)=F(b, a, c, x)$①.

若 $1-c$ 不等于 0 或负整数，也就是，若 c 不是正整数，则定理 29-A 还告诉我们，(1)在 $x=0$ 附近有第二个线性无关解，其指数 $m_2=1-c$. 这个解可直接求出，把

① 关于其他一些性质的概述可参看 A. Erdélyi (ed.) "Higher Transcendental Functions", vol. I, pp. 56, 119. McGraw-Hill, 1953.

$$y=x^{1-c}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)$$

代入(1)并计算系数即可．但更有意义的做法是把(1)中的因变量从 y 变到 z，而设

$$y=x^{1-c}z.$$

做了必要的置换计算之后(这些读者应该自己去做)，方程(1)变为

$$x(1-x)z''+[(2-c)-([a-c+1]+[b-c+1]+1)x]z'$$
$$-(a-c+1)(b-c+1)z=0, \tag{5}$$

这是常数 a,b,c 换成了 $a-c+1$，$b-c+1$ 及 $2-c$ 的超几何级数．我们已经知道，在原点附近，(5)具有幂级数解

$$z=F(a-c+1,b-c+1,2-c,x),$$

故所求的第二个解是

$$y=x^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c,x).$$

于是当 c 不等于整数时，超几何级数在奇异点 $x=0$ 附近的通解是

$$y=c_1F(a,b,c,x)+c_2x^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c,x). \tag{6}$$

一般说来，上面这个解只在原点附近成立．现在我们在奇异点 $x=1$ 附近来求(1)的解．求这个解的最简单的做法，是引入新的自变量 $t=1-x$ 而利用已得的解．这就使 $x=1$ 相应于 $t=0$，并把(1)变为

$$t(1-t)y''+[(a+b-c+1)-(a+b+1)t]y'-aby=0,$$

上式中的撇已表示对 t 的求导．由于这是个超几何方程，它的 $t=0$附近的通解可照公式(6)直接写出，但须把其中的 x 换成 t，把 c 换成 $a+b-c+1$；当 t 再换回到 $1-x$ 后，可以看出(1)在 $x=1$ 附近的通解是

$$y=c_1F(a,b,a+b-c+1,1-x)+c_2(1-x)^{c-a-b}F(c-b,c-a,$$
$$c-a-b+1,1-x). \tag{7}$$

这里必须假定 $c-a-b$ 不是一个整数．

公式(6)和(7)说明方程(1)中各常数的写法能适应各种情况，使我们可以把这个方程在其不同奇异点附近的通解，用同一个函数 F 来表达．它的意义还远不止于这一点，因为这些思想对一大类微分方程都适用．关键的一点是注意超几何方程有下列这些一般特点：其 y''，y'

及 y 的系数分别是 2, 1 和 0 次的多项式，并且其中头一个多项式具有不同实根. 凡具有这种特征的任何微分方程，都可以通过自变量的线性置换化为超几何方程的形式，因而它们在其不同奇异点处的解都可以用超几何函数来表示.

为把以上这些论点说得更具体些，我们简短地考察一下这类方程的普遍形式:

$$(x-A)(x-B)y''+(C+Dx)y'+Ey=0, \tag{8}$$

其中 $A\neq B$. 若令

$$t=\frac{x-A}{B-A}$$

而将自变量从 x 变到 t，则 $x=A$ 相应于 $t=0$，而 $x=B$ 相应于 $t=1$. 稍加计算后，便把方程(8)化为下列形式

$$t(1-t)y''+(F+Gt)y'+Hy=0,$$

这里 F, G 及 H 是(8)中各系数组合而成的某些式子，而撇是指对于 t 的求导. 这是以下列各式规定其 a, b, c 的一个超几何方程:

$$F=c,\quad G=-(a+b+1),\quad H=-ab,$$

因而它的在 $t=0$ 与 $t=1$ 附近的解可用超几何函数表示. 而这就是说(8)在 $x=A$ 及 $x=B$ 附近的解也可以用同一函数来表示.

以上所讲说明超几何函数 $F(a, b, c, x)$ 在微分方程领域里能适应许多情况而大有用武之地. 我们还可以看到(在习题 1 中)，有了 a, b, c 这三个常数所提供的灵活性，使超几何级数能把初等分析中大部分熟知的函数作为特例包括在它的范围内. 这个函数早为欧拉所知，并由欧拉发现它的一些性质；但第一个对它进行系统研究的是高斯，他是在处理超几何方程时遇到这个函数的，并且在这一点上他也是第一个对无穷级数的收敛性作了妥善处理的人. 高斯的工作有非常重要的历史意义，因为这不仅在分析的许多分支里（而不只限于无穷级数）开辟了影响深远的领域，并且还对线性微分方程与复变函数的一般理论有深远影响. 超几何函数由于它的统辖作用在现代数学中仍保持它的重

要性，因为高等分析中许多主要的特殊函数都跟它有关系。

习　题

1. 考察下列各式左边的函数的级数展开式，以验证其成立。

   a. $(1+x)^p=F(-p,b,b,-x)$；

   b. $\log(1+x)=xF(1,1,2,-x)$；

   c. $\sin^{-1}x=xF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2\right)$；

   d. $\tan^{-1}x=xF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x^2\right)$.

   此外还有

   e. $e^x=\lim\limits_{b\to\infty}F\left(a,b,a,\frac{x}{b}\right)$

   f. $\sin x=x\left[\lim\limits_{a\to\infty}F\left(a,a,\frac{3}{2},\frac{-x^2}{4a^2}\right)\right]$；

   g. $\cos x=\lim\limits_{a\to\infty}F\left(a,a,\frac{1}{2},\frac{-x^2}{4a^2}\right)$.

   读者暂且不管极限步骤是否合法，试证这些式子也成立。

2. 试求下列微分方程在所指定奇异点附近的通解：

   a. $x(1-x)y''+\left(\frac{3}{2}-2x\right)y'+2y=0,\ x=0$；

   b. $(2x^2+2x)y''+(1+5x)y'+y=0,\ x=0$；

   c. $(x^2-1)y''+(5x+4)y'+4y=0,\ x=-1$；

   d. $(x^2-x-6)y''+(5+3x)y'+y=0,\ x=3$.

3. 我们在习题 27-6 中讨论过契比雪夫方程

   $$(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0,$$

   其中 p 是个非负的常数。试将 x 换成 $t=\frac{1}{2}(1-x)$ 后把这方程化为一个超几何方程，并证它在 $x=1$ 附近的通解是

   $$y=c_1F\left(p,-p,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}F\left(p+\frac{1}{2},-p+\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1-x}{2}\right).$$

4. 设有微分方程

   $$x(1-x)y''+[p-(p+2)x]y'-py=0,$$

共中 p 为一常数.

a. 若 p 不是整数,试用超几何级数来求它在 $x=0$ 附近的通解.

b. 试把(a)中求出的通解写成用初等函数表示的式子.

c. 当 $p=1$ 时,微分方程变为

$$x(1-x)y''+(1-3x)y'-y=0,$$

而(b)中的解就不再是通解. 试用第16节所讲方法求这情形下的通解.

5. 有些微分方程即使外形看来不象,但实际却是超几何型的. 试把微分方程

$$(1-e^x)y''+\frac{1}{2}y'+e^xy=0$$

的自变量从 x 变到 $t=e^x$ 以求其在奇异点 $x=0$ 附近的通解.

6. a. 试证 $F'(a,b,c,x)=\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,x)$.

b. 将(a)中的微分法公式应用于习题3中的结果, 以证契比雪夫方程的解,只有一个在 $x=1$ 附近具有有界导数, 那就是 $y=c_1F\left(p,-p,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right)$. 由此得知契比雪夫方程的多项式解唯有 $F\left(n,-n,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right)$的常数倍这一种形式,其中 n 是非负的整数.

n 次契比雪夫多项式记为 $T_n(x)$, 其定义为 $T_n(x)=F\left(n,-n,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right)$. 这些多项式的一项有趣的应用是在近似法理论中,我们在附录D中将予以讨论.

31. 无穷远点

在物理和纯粹数学中,都需要研究微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1}$$

的解在自变量取大值时的情况. 例如,若自变量是时间,我们可能需要知道(1)所描述的物理系统,当其暂态干扰消失后在久远未来的情况.

我们可把以上的一套想法用来为这更广泛的目的服务, 这就是研究解在无穷远点附近的情况. 做法很简单,因若把自变量从 x 换到

$$t=\frac{1}{x}, \tag{2}$$

那末大的 x 值就相应于小的 t 值. 因此若把(2)用于(1), 把变换后的

方程在 $t=0$ 附近求解, 然后在所得的这些解里把 t 换回到 $\frac{1}{x}$, 便得出(1)的那些对 x 的大值成立的解. 为实行这一步骤, 需用以下的公式

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-t^2\frac{dy}{dt} \tag{3}$$

及

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\left(-t^2\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}\right)(-t^2). \tag{4}$$

把这些式子代入(1)并仍用撇表示对 t 求导, 则(1)变为

$$y''+\left[\frac{2}{t}-\frac{P(1/t)}{t^2}\right]y'+\frac{Q(1/t)}{t^4}y=0. \tag{5}$$

于是若 $t=0$ 是变换后方程(5)的一个寻常点、以 m_1 及 m_2 为指数的正则奇异点或非正则奇异点, 便相应地说 $x=\infty$ 是(1)的一个同样的点.

举一个简单的例子, 考察欧拉方程

$$y''+\frac{4}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0. \tag{6}$$

把(6)与(5)比较, 可知变换后的方程是

$$y''-\frac{2}{t}y'+\frac{2}{t^2}y=0. \tag{7}$$

$t=0$ 显然是(7)的正则奇异点, 指数方程是

$$m(m-1)-2m+2=0,$$

而指数是 $m_1=2$ 及 $m_2=1$. 这就是说(6)以 $x=\infty$ 为其一正则奇异点, 而指数是 2 及 1.

我们要讲的主要例子是超几何方程

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0. \tag{8}$$

我们已经知道(8)具有两个有限的正则奇异点: $x=0$, 其指数为 0 及 $1-c$; $x=1$, 其指数为 0 及 $c-a-b$. 为确定点 $x=\infty$ 的性质, 我们把(3)及(4)直接代入(8). 稍加整项后, 得变换后的方程为

$$y''+\left[\frac{(1-a-b)-(2-c)t}{t(1-t)}\right]y'+\frac{ab}{t^2(1-t)}y=0. \tag{9}$$

这个方程的正则奇异点是 $t=0$, 其指数方程是

$$m(m-1)+(1-a-b)m+ab=0$$

即

$$(m-a)(m-b)=0.$$

这说明方程(9)在 $t=0$ 的指数是 a 及 b, 故方程(8)以 $x=\infty$ 为一正则奇异点，其指数是 a 及 b. 故得结论为，超几何方程(8)恰好有三个正则奇异点: 0, 1, 及∞, 其指数分别为 0 及 $1-c$, 0 及 $c-a-b$, a 及 b. 我们在附录 E 中证明，若规定了这三个正则奇异点并要求在 $x=0$ 及 $x=1$ 都至少有一个指数必须等于 0, 那末超几何方程的形式就完全确定了.

另一个相当重要的古典微分方程是**合流超几何方程** (confluent hypergeometric equation)

$$xy''+(c-x)y'-ay=0. \tag{10}$$

要了解这方程的来历及其命名的理由，我们考察下列形式的普通超几何方程

$$s(1-s)\frac{d^2y}{ds^2}+[c-(a+b+1)s]\frac{dy}{ds}-aby=0. \tag{11}$$

若把自变量从 s 变到 $x=bs$, 则得

$$\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds}=b\frac{dy}{ds} \text{ 及 } \frac{d^2y}{ds^2}=b^2\frac{d^2y}{ds^2},$$

于是(11)变为

$$x\left(1-\frac{x}{b}\right)y''+\left[(c-x)-\frac{(a+1)x}{b}\right]y'-ay=0, \tag{12}$$

其中的撇是指对 x 的求导. 方程(12)有正则奇异点 $x=0$, $x=b$ 及 $x=\infty$; 它与(11)的不同之处是这里的奇异点 $x=b$ 是可移动的. 若令 $b\to\infty$, (12)就变为(10). 在 b 处的这个奇异点显然同无穷远点合流了，容易看出，两个正则奇异点在∞处的这一合流，就在那里产生一个非正则的奇异点(习题 3).

习 题

1. 对于下列方程用(3)及(4)来确定点∞的性质.

   a. 勒让特方程 $(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0$;

   b. 贝塞耳方程 $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$.

2. 试证以 $y=t^a w$ 变换因变量可把方程(9)化为超几何方程

   $t(1-t)w''+\{(1+a-b)-[a+(1+a-c)+1]t\}w'-a(1+a-c)w=0.$

   若 $a\neq b$ 且其差不是整数，则超几何方程 (8) 对于大的 x 值具有下列线性无关解

$$y_1=\frac{1}{x^a}F\left(a,1+a-c,1+a-b,\frac{1}{x}\right)$$

   及

$$y_2=\frac{1}{x^b}F\left(b,1+b-c,1+b-a,\frac{1}{x}\right).$$

3. 试验证合流超几何方程(10)以 $x=\infty$ 为其非正则奇异点.

4. 试验证合流超几何方程(10)以 $x=0$ 为一正则奇异点，其指数为 0 及 $1-c$. 若 c 不等于 0 或负整数，试证相应于指数 0 的弗氏级数解为

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}x^n.$$

   这个级数所定义的函数叫合流超几何函数，常记为 $F(a,c,x)$.

5. 拉盖尔方程是

$$xy''+(1-x)y'+py=0,$$

   其中 p 是常数[①]. 试利用习题 4 证明在原点附近为有界的唯一的解是 $F(-p,1,x)$ 的常数倍，且当 p 为非负整数时这些解是多项式. 函数 $L_n(x)=F(-n,1,x)$ (其中 $n=0,1,2,\cdots$)叫拉盖尔多项式；它们在氢原子的量子力学中有重要应用.

附录 A. 两个关于收敛性的证明

定理 27-A 的证明(完) 我们的假定是级数

---

① 拉盖尔(Edmond Laguerre, 1834—1886) 是巴黎法兰西学院的教授，主要研究几何及方程论. 在解析几何的坐标平面里，可以用一种以上的方式来指定"合理"的距离函数(度量)，拉盖尔是最早指出这件事的数学家之一.

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n \text{ 及 } Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n \tag{1}$$

在$|x|<R(R>0)$上收敛．我们必须证明，级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{2}$$

在 a_0 及 a_1 为任意数而 a_{n+2} 对于 $n\geqslant 0$ 由下列递推公式

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=-\sum_{k=0}^{n}[(k+1)p_{n-k}a_{k+1}+q_{n-k}a_k] \tag{3}$$

所定时，(2)至少在同一区间上收敛．设 r 是合乎 $r<R$ 的一个正数．由于级数(1)对 $x=r$ 收敛，而收敛级数的项趋于 0 因而是有界的，故存在一常数 $M>0$，使对于一切 n，

$$|p_n|r^n\leqslant M \quad \text{及} \quad |q_n|r^n\leqslant M.$$

在(3)中应用这两个不等式，得到

$$(n+1)(n+2)|a_{n+2}|\leqslant\frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|]r^k$$

$$\leqslant\frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|]r^k+M|a_{n+1}|r,$$

其中 $M|a_{n+1}|r$ 这一项是后加进去的，因为底下要用到．现定义 $b_0=|a_0|$，$b_1=|a_1|$，并定义 b_{n+2}(对于 $n\geqslant 0$)如下：

$$(n+1)(n+2)b_{n+2}=\frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k+Mb_{n+1}r. \tag{4}$$

对于每个 n，显然有 $0\leqslant|a_n|\leqslant b_n$．现在我们想考查一下使级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \tag{5}$$

收敛的 x 值是哪些，为此需要知道比值 b_{n+1}/b_n 在 $n\to\infty$ 时的情况．这一情况是如下来了解的．把(4)中的 n 先后换成 $n-1$ 及 $n-2$，得到

$$n(n+1)b_{n+1}=\frac{M}{r^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k+Mb_nr$$

及

$$(n-1)nb_n=\frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k+Mb_{n-1}r.$$

以 r 乘第一式并利用第二式，得到

$$\begin{aligned}rn(n+1)b_{n+1}&=\frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k\\&\quad+rM(nb_n+b_{n-1})+Mb_nr^2\\&=(n-1)nb_n-Mb_{n-1}r+rM(nb_n+b_{n-1})+Mb_nr^2\\&=[(n-1)n+rMn+Mr^2]b_n,\end{aligned}$$

故

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n-1)n+rMn+Mr^2}{rn(n+1)}.$$

这就告诉我们

$$\left|\frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_nx^n}\right|=\frac{b_{n+1}}{b_n}|x|\to\frac{|x|}{r},$$

因此级数(5)对 $|x|<r$ 收敛，故由不等式 $|a_n|\leqslant b_n$ 及比较检定法，可知级数(2)对 $|x|<r$ 也收敛．因为 r 是小于 R 的任一正数，故可断定(2)对 $|x|<R$ 收敛，证毕．

定理 29-A 的证明(完)　论证同刚才对定理 27-A 所作的相似，但其细节有足够不同之处，值得另行讨论．我们假定级数

$$xP(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n \text{ 及 } x^2Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n \qquad (6)$$

在 $|x|<R(R>0)$ 上收敛．指数方程是

$$f(m)=m(m-1)+mp_0+q_0=0. \qquad (7)$$

我们只考虑(7)有两个实根 m_1 及 m_2 且 $m_2\leqslant m_1$ 的情形．我们须考察其收敛性的级数是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{8}$$

其中 a_0 是任意非零常数，其他的系数 a_n 则通过下列递推公式用 a_0 表示：

$$f(m+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}]. \tag{9}$$

我们的任务是证明：若 $m=m_1$，还有 $m=m_2$ 以及 m_1-m_2 不等于正整数时，级数(8)在 $|x|<R$ 收敛。

先指出 $f(m)$ 可写成

$$f(m)=(m-m_1)(m-m_2)=m^2-(m_1+m_2)m+m_1m_2$$

稍加计算，由此可得

$$f(m_1+n)=n(n+m_1-m_2)$$

及

$$f(m_2+n)=n(n+m_2-m_1);$$

于是

$$|f(m_1+n)|\geqslant n(n-|m_1-m_2|) \tag{10}$$

及

$$|f(m_2+n)|\geqslant n(n-|m_2-m_1|). \tag{11}$$

设正数 $r<R$。由于级数(6)对 $x=r$ 收敛，故存在一常数 $M>0$，使对于一切 n 有

$$|p_n|r^n\leqslant M \quad \text{及} \quad |q_n|r^n\leqslant M. \tag{12}$$

若令(9)中的 $m=m_1$ 并利用(10)及(12)，则得

$$n(n-|m_1-m_2|)|a_n|\leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|a_k|}{r^{n-k}}(|m_1|+k+1).$$

现在定义一个数列 $\{b_n\}$ 如下：

对于 $0\leqslant n\leqslant|m_1-m_2|$，$b_n=|a_n|$，

而对于 $n>|m_1-m_2|$，

$$n(n-|m_1-m_2|)b_n=M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{r^{n-k}}(|m_1|+k+1). \tag{13}$$

显然，对于一切 n 有 $0\leqslant|a_n|\leqslant b_n$. 我们要证明在 $|x|<r$ 上级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \tag{14}$$

收敛，为此我们希望求出一个表示比值 b_{n+1}/b_n 的方便式子. 把(13)中的 n 换成 $n+1$，乘以 r，并利用(13)以简化所得结果，则有

$$\begin{aligned}&n(n+1)(n+1-|m_1-m_2|)b_{n+1}\\&=n(n-|m_1-m_2|)b_n+Mb_n(|m_1|+n+1),\end{aligned}$$

故

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n(n-|m_1-m_2|)+M(|m_1|+n+1)}{r(n+1)(n+1-|m_1-m_2|)}.$$

这告诉我们

$$\left|\frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_nx^n}\right|=\frac{b_{n+1}}{b_n}|x|\to\frac{|x|}{r},$$

故(14)在 $|x|<r$ 上收敛. 现从 $0\leqslant|a_n|\leqslant b_n$ 可知(8)也在 $|x|<r$ 上收敛；而由于所取 r 是小于 R 的任意数，故知(8)在 $|x|<R$ 上收敛. 若以上的 m_1 都换成 m_2 并在利用(10)之处改为利用(11)，则经过同样的计算，可证在这情形下级数(8)也在 $|x|<R$ 上收敛，这里当然要假定 m_1-m_2 不等于正整数以使级数(8)是有合法定义的.

附录 B. 厄尔米特多项式及量子力学

厄尔米特多项式的最重要的单独一项应用是在量子力学的线性谐振子理论中. 这一理论所产生的一个与厄尔米特方程(习题 27-7) 有密切关系的微分方程是

$$\frac{d^2w}{dx^2}+(2p+1-x^2)w=0, \tag{1}$$

其中 p 是个常数. 根据本附录末所讨论的理由，对于(1)的解，物理学

家只注重那种在$|x|\to\infty$时趋于 0 的解．如想直接用幂级数解(1)，就得到系数的三项递推公式，这就太不方便，不值得作进一步的考察．为使问题简化，我们用

$$w=ye^{-x^2/2} \tag{2}$$

引入新的因变量 y．这就把(1)变为

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2py=0, \tag{3}$$

这是厄尔米特方程．因此所需求的(1)的解，相应于(3)的那种解，它们(随$|x|\to\infty$)数值的增大不比 $e^{x^2/2}$ 快，而我们将会看到这些基本上就是厄尔米特多项式．

物理学家之想出变换(2)来自如下的巧妙论证．当 x 很大时，方程(1)中的常数 $2p+1$ 与 x^2 相比可忽略，故(1)近似地成为

$$\frac{d^2w}{dx^2}=x^2w.$$

于是猜想函数 $w=e^{\pm x^2/2}$ 可能是这个方程的解就并非是太不合情理之事．现在我们有

$$w'=\pm xe^{\pm x^2/2} \quad 及 \quad w''=x^2e^{\pm x^2/2}\pm e^{\pm x^2/2};$$

而由于当 x 取大值时 w'' 的第二项与第一项相比可以忽略，所以看来 $w=e^{x^2/2}$ 及 $w=e^{-x^2/2}$ 确实是(1)的"近似解"．第一个我们不要，因为它在$|x|\to\infty$ 时并不趋于 0．因此有理由假设(1)的精确解具有(2)这种形式，并且我们希望那里的函数 y 具有比 $w(x)$ 简单的结构．

不管你对这种推理方式有什么意见，但它解决问题．因为我们在习题 27-7 中看到，厄尔米特方程(3)具有二项递推公式

$$a_{n+2}=-\frac{2(p-n)}{(n+1)(n+2)}a_n, \tag{4}$$

而这公式产生出两个线性无关的级数解

$$y_1(x)=1-\frac{2p}{2!}x^2+\frac{2^2p(p-2)}{4!}x^4-\frac{2^3p(p-2)(p-4)}{6!}x^6+\cdots \tag{5}$$

及

$$y_2(x)=x-\frac{2(p-1)}{3!}x^3+\frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5$$

$$-\frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7+\cdots \tag{6}$$

它们都对所有 x 收敛.

现在我们把函数 $y_1(x)$与 $e^{x^2/2}$ 的增大速率比较一下. 我们的目标是要证明:

$$当|x|\to\infty 时 \frac{y_1(x)}{e^{x^2/2}}\to 0,$$

当且仅当 $y_1(x)$的级数式子到某项中断而成为多项式, 也就是当且仅当参量 p 取 0, 2, 4, …诸值之一. "当"的这部分根据罗彼塔法则是很显然的. 为证明"仅当"这部分, 我们假定 $p\neq 0, 2, 4, \cdots$, 并证明在这种情形下上面这个分数并不趋于 0. 为此, 我们利用下面事实: $y_1(x)$具有 $y_1(x)=\sum a_{2n}x^{2n}$ 这种形式, 其系数由(4)以及条件 $a_0=1$ 确定; 又 $e^{x^2/2}$ 具有级数展开式 $e^{x^2/2}=\sum b_{2n}x^{2n}$, 其中 $b_{2n}=\frac{1}{2^n n!}$, 故

$$\frac{y_1(x)}{e^{x^2/2}}=\frac{a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots}{b_0+b_2x^2+b_4x^4+\cdots+b_{2n}x^{2n}+\cdots}.$$

由公式(4)可知上式分子中的系数当其下标足够大时都有相同的正负号, 故可设这些系数都是正的而无损于一般性. 因此, 为证明这个分数不随 $|x|\to\infty$ 而趋于 0, 只要证明 n 足够大时 $a_{2n}>b_{2n}$ 就行了. 而为着证明这一点, 我们先指出

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}=-\frac{2(p-2n)}{(2n+1)(2n+2)} \text{ 及 } \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}}=\frac{1}{2(n+1)}.$$

$$\frac{a_{2n+2}/a_{2n}}{b_{2n+2}/b_{2n}}=-\frac{2(p-2n)2(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\to 2.$$

这表明, 对于足够大的 n, 我们有

$$\frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}}>\frac{3}{2}\cdot\frac{a_{2n}}{b_{2n}}.$$

若 N 是这些足够大的 n 之一, 则反复应用上面的不等式, 则对于足够大

的 k, 有

$$\frac{a_{2N+2k}}{b_{2N+2k}}>\left(\frac{3}{2}\right)^k\frac{a_{2N}}{b_{2N}}>1,$$

故若 n 足够大, 则 $a_{2n}/b_{2n}>1$ 或 $a_{2n}>b_{2n}$. 上述论点证明了 $|x|\to\infty$ 时 $y_1(x)e^{-x^2/2}\to 0$ 当且仅当参量 p 取 $0, 2, 4, \cdots$ 诸值之一. 同样的推理可对 $y_2(x)e^{-x^2/2}$ (以 $p=1, 3, 5, \cdots$) 作出的同样的结论, 故厄尔米特方程的所要求的解是习题 27-7 中所定义厄尔米特多项式 $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $\cdots$ 的常数倍.

生成函数及罗德里克公式 从上述我们看到厄尔米特多项式是怎样搞出来的, 现在我们来考察它们的一些最有用的特性. 这些性质的重要意义到本附录末了就可以看得很清楚.

这些多项式常用下面的幂级数展开式来定义:

$$e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n=H_0(x)+H_1(x)t+\frac{H_2(x)}{2!}t^2+\cdots. \tag{7}$$

函数 e^{2xt-t^2} 叫厄尔米特多项式的*生成函数*. 这一定义的好处是对于推出 $H_n(x)$ 的性质非常方便, 它的缺点是完全突如其来. 因此我们要从级数解(5)及(6)推出(7)来.

把(5)及(6)中的 p 换成任一整数 $n\geq 0$ 之后乘以任意常数, 可以得出(3)的所有多项式解. 它们都具有如下形式

$$\begin{aligned}h_n(x)&=\cdots+a_{n-6}x^{n-6}+a_{n-4}x^{n-4}+a_{n-2}x^{n-2}+a_nx^n\\&=a_nx^n+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-4}x^{n-4}+a_{n-6}x^{n-6}+\cdots,\end{aligned}$$

上面这和式的最末一项(依 n 是偶数还是奇数而定)是 a_0 或 a_1x, 而其中的系数间有下列关系式

$$a_{k+2}=-\frac{2(n-k)}{(k+1)(k+2)}a_k. \tag{8}$$

现在要用 a_n 来表示 $a_{n-2}, a_{n-4}, \cdots$, 为此, 把(8)中的 k 换成 $k-2$ 而得

$$a_k=-\frac{2(n-k+2)}{(k-1)k}a_{k-2}$$

或

$$a_{k-2}=-\frac{k(k-1)}{2(n-k+2)}a_k.$$

令 k 为 $n, n-2, n-4$ 等等，得到

$$a_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{2\cdot 2}a_n,$$

$$a_{n-4}=-\frac{(n-2)(n-3)}{2\cdot 4}a_{n-2}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 2\cdot 4}a_n,$$

$$a_{n-6}=-\frac{(n-4)(n-5)}{2\cdot 6}a_{n-4}$$

$$=-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6}a_n,$$

等等，故

$$h_n(x)=a_n\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2\cdot 2}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 2\cdot 4}x^{n-4}\right.$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6}x^{n-6}+\cdots$$

$$\left.+(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{2^k\cdot 2\cdot 4\cdots(2k)}x^{n-2k}+\cdots\right].$$

这个式子可写为

$$h_n(x)=a_n\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{n!}{2^{2k}k!(n-2k)!}x^{n-2k},$$

其中[$n/2$]表示$\leqslant n/2$ 的最大整数，是一种标准记法．为得出第 n 个厄尔米特多项式 $H_n(x)$，令 $a_n=2^n$，得到

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}. \tag{9}$$

这样选取 a_n 完全是为了方便；这样可以使那些表达厄尔米特多项式各种性质的公式得到简化．

为了能从(9)变换到(7)，我们简略地讲一些别的材料．二幂级乘积的定义公式

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n t^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)t^n$$

在其第一个级数只含 t 的偶次幂时，用起来有困难：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n t^n\right)=?$$

我们这里所要做的事是从一切可能的乘积 $a_k t^{2k} b_j t^j$（使 $2k+j=n$）中把 t 的 n 次幂都合并一起，因此我们所要考虑的项是 $a_k t^{2k} b_{n-2k} t^{n-2k}$. 限制的条件是 $k\geqslant 0$ 及 $n-2k\geqslant 0$，故 $0\leqslant k\leqslant n/2$；而对每一个 $n\geqslant 0$ 我们要保证 k 从 0 变到 $\leqslant n/2$ 的最大整数．这就得出乘积公式

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n t^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{[n/2]}a_k b_{n-2k}\right)t^n. \tag{10}$$

现若把(9)代入(7)右边并利用(10)，便得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}\right]t^n\\&=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}t^n\right]\\&=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2xt)^n}{n!}\right]\\&=e^{-t^2}e^{2xt}=e^{2xt-t^2},\end{aligned}$$

这就证明了(7).

作为(7)的一个应用，我们来证明厄尔米特多项式的**罗德里克公式**：

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}. \tag{11}$$

根据幂级数系数公式 25-(9)，(7)给出

$$H_n(x)=\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{2xt-t^2}\right)_{t=0}=e^{x^2}\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{-(x-t)^2}\right)_{t=0}.$$

若引入新变量 $z=x-t$ 并利用 $\partial/\partial t=-(\partial/\partial z)$ 这一事实，则因 $t=0$ 相应于 $z=x$，上面的式子就变成

$$(-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}\right)_{z=x}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},$$

证毕.

正交性 我们知道，对于每个非负整数 n，函数

$$w_n(x)=e^{-x^2/2}H_n(x) \tag{12}$$

(它叫 n 阶厄尔米特函数)随 $|x|\to\infty$ 而趋于 0，而且是微分方程

$$w_n''+(2n+1-x^2)w_n=0 \tag{13}$$

的一个解. 这些函数的一个重要性质是

$$\int_{-\infty}^{\infty}w_m w_n dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx=0 \quad (若\ m\neq n). \tag{14}$$

这个关系常被人说成是：厄尔米特函数在区间$(-\infty,\infty)$上正交.

为证明(14)，先写出 $w_m(x)$所满足的方程

$$w_m''+(2m+1-x^2)w_m=0. \tag{15}$$

以 w_m 乘(13)，以 w_n 乘(15)，并相减，得到

$$\frac{d}{dx}(w_n'w_m-w_m'w_n)+2(n-m)w_m w_n=0.$$

若把这个方程从 $-\infty$ 积分到 ∞，并利用 $w_n'w_m-w_m'w_n$ 在两积分限处都等于 0 这一事实，便知

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty}w_m w_n dx=0,$$

而这就给出(14).

我们还需要知道(14)中积分在 $m=n$ 时的值是

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}[H_n(x)]^2dx=2^n n!\sqrt{\pi}. \tag{16}$$

为证明此式，用罗德里克公式(11)并把

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_n(x)dx=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}dx$$

分部积分，这里取

$$u=H_n(x),\quad du=H_n'(x)dx,$$

$$dv=\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}dx,\quad v=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2},$$

因为 uv 是 e^{-x^2} 与一多项式的乘积，所以它在两积分限处都等于 0，于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_n(x)]^2dx=(-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty} H_n'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}dx$$

$$=(-1)^{n+2}\int_{-\infty}^{\infty} H_n''(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}e^{-x^2}dx$$

$$=\cdots=(-1)^{2n}\int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x)e^{-x^2}dx.$$

但 $H_n(x)$中含 x 最高次幂的项是 2^nx^n，故 $H_n^{(n)}(x)=2^nn!$ 所以最末这个积分是

$$2^nn!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=(2^nn!)2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=2^nn!\sqrt{\pi}.$$

这就是所要证的结果①.

这些正交性质可用来把一"任意"函数 $f(x)$ 展开为一个**厄尔米特级数**：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nH_n(x). \tag{17}$$

若按形式步骤做，则可求出系数 a_n如下：以 $e^{-x^2}H_m(x)$乘(17)并从$-\infty$到∞逐项积分. 根据(14)及(16)，这就给出

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx$$

① e^{-x^2} 从 0 积到∞的结果等于$\sqrt{\pi}/2$，这是在初等微积分中通常有证明的事实. 参看习题 34-3.

$$=a_m 2^m m!\sqrt{\pi},$$

故(将m换成n)

$$a_n=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)f(x)dx. \tag{18}$$

这一形式步骤给我们提出的数学问题是：若系数a_n由(18)确定，则函数$f(x)$须满足什么条件才能保证(17)成立．这类问题是正交函数一般理论中的问题之一．我们将在第六章附录A及B中讨论像(17)这样的正交展开式在物理上的一些直接应用．

谐(调和)振子 正如开头说的，前面所讲这些数学思想的主要应用是在量子力学里．要充分讨论这方面的内在物理概念显然超出本附录的范围．然而要了解厄尔米特多项式$H_n(x)$以及相应的厄尔米特函数$e^{-x^2/2}H_n(x)$所起的作用却甚为容易．

我们在第20节中分析了古典谐振子，这可以看作是限制在x轴上运动的一个质量为m的质点，受一个回复力$-kx$的作用使之趋向平衡位置$x=0$．运动方程是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx;$$

若取合适的初始条件，则得到的解是谐振荡

$$x=x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t,$$

这里x_0是振幅．我们也还记得周期T是$T=2\pi\sqrt{m/k}$；而由于振动频率ν是周期的倒数，故有$k=4\pi^2m\nu^2$．又由于动能是$\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$而势能是$\frac{1}{2}kx^2$，故稍作计算后可证这个系统的总能量是$E=\frac{1}{2}kx_0^2$，一个常数．这个总能量显然可以取任何正数值．

在量子力学中，上述谐振子的薛定谔波动方程是

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2m}{h^2}\left(E-\frac{1}{2}kx^2\right)\psi=0, \tag{19}$$

这里E仍是总能量，h是普朗克常数，而合适的解$\psi(x)$叫做**薛定谔波动函数**①. 若用等式$k=4\pi^2m\nu^2$来消去(19)式中的k，则(19)可写成

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2m}{h^2}(E-2\pi^2m\nu^2x^2)\psi=0. \tag{20}$$

这个方程的在物理上可以接受的(或者说“循化了的”)解，是满足下列条件的那些解：

$$当|x|\to\infty 时 \psi\to0 且 \int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2dx=1. \tag{21}$$

这些解(薛定谔波动函数)也叫做这一问题的**特征函数**，而我们将会看到，只有在E具有某些特定的值即所谓**特征值**时，这些解才存在.

若把自变量换为

$$u=2\pi\sqrt{\frac{\nu m}{h}}x, \tag{22}$$

则(20)变为

$$\frac{d^2\psi}{du^2}+\left(\frac{2E}{h\nu}-u^2\right)\psi=0, \tag{23}$$

而条件(21)变为

$$当|u|\to\infty 时 \psi\to0 且 \int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2du=2\pi\sqrt{\frac{\nu m}{h}}. \tag{24}$$

除了记号不同之外，方程(23)正好同方程(1)的形式一样，故知它具有满足(24)中第一个条件的解，当且仅当：对于某个非负整数n，$2E/h\nu=2n+1$，或

$$E=h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{25}$$

我们也知道，在这种情况下，(23)的这些解的形式是

---

① 薛定谔(Erwin Schrödinger, 1887—1961)奥地利理论物理学家，与狄拉克(Dirac)分享1933年诺贝尔奖金. 他的科学工作只有专家能懂，但他的文化素养很广泛，是个庞加莱(Poincaré)式的文笔清新流畅的作家. 他喜欢用一些思想丰富的小册子来写大题目，如《什么是生命?》，《科学与人文主义》，《自然界与希腊学者》(原著分别出版于1944, 52, 54年).

$$\psi = ce^{-u^2/2}H_n(u),$$

其中 c 是一常数．现若加上(24)中的第二个条件并利用(16)，则知

$$c=\left[\frac{4\pi\nu m}{2^{2n}(n!)^2h}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

所以相应于特征值(25)的特征函数是

$$\psi=\left[\frac{4\pi\nu m}{2^{2n}(n!)^2h}\right]^{\frac{1}{4}}e^{-u^2/2}H_n(u), \tag{26}$$

其中的 u 可按(22)用 x 表示之．

物理学家出于其专业上的需要对这些特征函数的详细性质非常重视．但对我们来说，这问题只不过借以说明厄尔米特多项式在哪些地方有用，所以我们就不再进一步讲这个问题，而仅再指出公式(25)给出了谐振子的所谓量子化能级．这就是说，能量只可以取这些离散数值，而这当然同前述那个相应古典问题的情况很不一样．这些思想的最简单的具体应用是在双原子分子里关于原子的振动情况．当科学家从实验上来研究这一现象时，他们所观察到的能量数值正好同(25)给出的符合．

关于厄尔米特的注记　厄尔米特(Charleo Hermite, 1822—1901)，十九世纪法国最杰出数学家之一，特别以其著作的风格优美的艺术性著称．他在求学期间由于忽视平时作业里指定学习的古典数学名著，学业成绩搞得很糟；他虽然考试几乎不及格，但早在二十岁出头就已成为第一流有创造才能的数学家．1870 他任索尔蓬(Sorbonne)大学教授，在那里他培养了整个一代的法国著名数学家，其中包括毕卡(Picard)、波雷耳(Borel)和庞加莱(Poincaré)．

他那非凡的才思从下面所引庞加莱的话可以略知一二："同厄尔米特先生谈话．他从未求助于具体形象，但你能立刻体会到，对于他，最抽象的概念就像活的东西一样．"他不喜欢几何，但非常爱好数论和分析，并最擅长椭圆函数，在那里数论和分析两个领域有许多奇妙的结合．读者也许知道，阿倍耳(Abel)在他之前好多年证明一般五次方程不能用只含四则运算和根号运算的函数求解．厄尔米特的最惊人成就之一是证明了(1858)这种方程可用椭圆函数求解．他在 1873 年证明 e 的超越性，这又是他一生工作的顶峰之一．

他在纯数学上的好些发现，许多年后在数学物理上找到意想不到的应用．例

如，他在搞某些数论问题时发明的厄尔米特齐式和厄尔米特矩阵，对于海森堡(Heisenberg)1925年的量子力学关系重大，并且我们已经看到厄尔米特多项式和厄尔米特函数对于解薛定谔波动方程有用．为什么会这样，我们不清楚，但看来有这样的事实，即数学家在考虑一些表面上与物理现实毫无关系的问题时，有时会做出最有价值的实际工作．

附录C. 高 斯

高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)是最伟大的数学家，也是有历史记载的最有禀赋的天才．这位屹立在19世纪初的巨人是近代数学和以往一切数学的分水岭．他在形象思维上的洞察力和创见，他工作成就的广度和深度，他一再显示出来的几乎超人的智力和毅力，所有这些品质能够结合在单独一个人身上，这对我们后代也如同对他当时的人一样，都是感到难以理解的．

高斯出生在德国北部城市不伦瑞克．他很小就表现出对于数有非凡才能，因此在晚年他打趣说：他在说话以前先会算数．据说哥德六岁就编导木偶戏的剧本和演出，莫札特五岁就作出第一首儿时小步舞曲，而高斯三岁就纠正了他父亲工资表上的一处计算错误①．他父亲是园丁兼泥水匠，既无钱也无意培养造就他这个天才孩子．幸亏高斯在心算方面的杰出才能引起了当地一些人物的注意，并终于使不伦瑞克公爵也知道了他．公爵很欣赏这个孩子，亲自负责他以后的教育，先把他送到不伦瑞克的卡罗林学院(1792—1795)，其后让他去格廷根大学(1795—1798)．

高斯在卡罗林学院里掌握了古典语文并研读了牛顿、欧拉和拉格朗日的著作．早在这一时期(也许是他十四、五岁之际)他就发现了质数定理，而那个定理终于在1896年由许多数学家经过很大努力后给予证明(参看本书中关于契比雪夫和黎曼的注记)．他也发明了使观测数

---

① 参看 W.S. von Waltershausen《回忆高斯》("Gauss zum Gedächtniss")，该书于1856年问世，于1966年由他的曾孙女 Helen W. Gauss 译成英文私资付印．

据的固有误差为极小的最小二乘法，并提出了概率论中的高斯（或正态）分布律.

在大学里，高斯对语言学发生兴趣而讨厌数学课，他的日后攻读方向曾一度摇摆不定. 然而他在十八岁时在几何上作出了奇妙的发现，使他决心从事数学，并终生给他以极大的乐趣. 古代希腊人知道用尺规作 3, 4, 5 及 15 边的正多边形，以及通过平分角法从这些正多边形得出的所有其他正多边形. 但只能作这些，问题到这里搁了 2000 年，直到高斯才把问题完全解决. 他证明正 n 边形尺规可作，当且仅当 n 等于 2 的一个乘幂与形为 $p_k=2^{2^k}+1$ 的一些质数相乘的乘积. 特别是当 $k=0, 1, 2, 3$ 时，相应的 $p_k=3, 5, 17, 257$ 是质数，故有这种边数的正多边形是尺规可作的①.

在这些年月里，高斯才思泉涌几乎日不暇给. 他开始作简短科学日记，来记录他所发现的事，因为他所发现的结果太多，当时都来不及详述. 第一项记录的日子是 1796 年 3 月 30 日，内容是说正 17 边形可作，但甚至在比这还早的日子里，他已在深入钻研数论里前人所未曾探索过的几个领域. 1795 年他发现了二次互反律，并在其后写道："这个定理使我伤了整整一年的脑筋并且花了我极大的精力，最后终于找到证明."② 当时高斯还不知道这定理已由欧拉未加证明地提出了不完善的叙述，并由勒让特提出了正确的叙述和不正确的证明. 这是他的名著《算术论丛》(Dioquisitiones Arithmetical)的核心部分，该书虽于 1798 写完但到 1801 才发表③. 除了提到早期数学家的一些零碎结果之外，这部巨作的内容完全是创新的. 一般认为这部著作标志着近世数

① 其中一些作法的内容可参看 H. Tietze 著《数学名题》("Famous Problems of Mathematics")第九章.

② 参看 D. E. Smith《数学资料》("A Source Book in Mathematics", pp. 112—118, McGraw-Hill, New York, 1929). 这本选集中包括定理的叙述及高斯多年内作出八个证明中的第五个证明. 现今知道的可能已经有 50 个以上的证明.

③ 有 Arthur A. Clarke 的英译本 (Yale University Press, New Haven, Conn., 1966).

论的真正开始，正如牛顿的《原理》对于物理和天文所起的作用一样. 在开头作为引言的几页里，为研究可除性问题，高斯搞出了同余的方法，并对算术基本定理(又叫唯一因子分解定理)给出了第一个证明. 这个定理说的是：每个整数 $n>1$ 可以唯一地表示为质数因子的乘积. 该书的核心部分是主要讨论二次同余、齐式和余式的. 在最后一节里他给出了分圆方程的完整理论，并述及其对正多边形是否可作问题的应用. 整部著作是纯数学上的一席盛宴，他的后继者只能慢慢地勉为其难地加以消化.

高斯在他的《论丛》里还创立了现代学者对待数学的严格方法和态度. 他感到前人那种经不起推敲的叙述和证明是完全不能容忍的，因而决心要使他自己的著作在这方面无懈可击. 正如他在给友人信中所说的，“我所说的证明用意与律师的不同，律师认为两个一半的证明等于整个证明，而我是按数学家的意义来了解的，即认为$\frac{1}{2}$证明$=0$，而要求有使任何疑问成为不可能的证明”. 《论丛》就是按照这个精神以高斯那种老练的文体写成的，它简单扼要，严密，不讲来龙去脉，有些地方文字几经琢磨，以致使人读了几乎不能理解. 他在另一封信里说道：“你知道我写得慢. 这主要是因为我总想用尽量少的字句来表达尽量多的思想，否则决不干休，而写得简短比长篇大论地写更花费时间.”他的这种习惯所产生的效果之一是，他著作中所隐藏的内容几乎同他所发表的一样多，因为他花了不少力气把引导他得出发现的思路痕迹统统删除净尽. 阿倍耳曾说：“他像只狐狸，用尾巴抹平了自己在沙地上走过的脚印”. 对于这些批评，高斯回答说凡有自尊心的建筑师在楼房完工后总不会把脚手架留在那儿的. 不过他的著作难于阅读也使他的思想非常难于传播.

高斯的博士论文(1799)也是数学史上的另一块里程碑. 经过早期数学家达朗贝尔、欧拉、拉格朗日、拉普拉斯等人毫无结果的尝试之后，代数基本定理终于在那里第一次得到了令人满意的证明. 这定理论述

实系数或复系数的任一多项式方程存在实根或复根. 高斯的成功开创了进行存在性证明的新时代,从此以后,这种证明在纯数学里有了重要的作用. 而且在这第一个证明里(他总共给出四个证明), 看来高斯是第一个满有把握地运用复数和复平面几何的数学家①.

高斯在他一生的第二个时期转向繁重的应用数学工作, 因而除了少数例外, 他那丰富的思想宝藏只潜伏在他的日记和笔记中显出其生命力.

在十八世纪九十年代, 许多天文学者想在火星轨道和木星轨道之间找一个新行星,因为根据波德(Bode)定律(1772)②,那里应该还有一个行星. 1801年在那个天域发现了后日叫小行星中的第一颗并且是最大的一颗谷神星(Ceres). 具有讽刺意义的是,这一发现与哲学家黑格尔发表一篇惊人文章的日子不谋而合. 他在那篇文章里讥笑天文家学忽视哲学,说是哲学能够给他们证明不可能再存在新的行星,免得他们浪费时间和精力③. 黑格尔继续用这样的腔调发表他的哲学文章,以后更连篇累牍地写出神乎其神的哲学著作. 令人遗憾的是这微渺的新行星即使在条件最佳时也很难以看到, 不久又消失在太阳附近的亮的天域里. 当时需要根据少量的观测数据来算出足够精确的轨道, 以便重新确定谷神星在远离太阳时的位置. 欧洲天文学家搞了好几个月不成. 最后高斯也被这一问题所吸引, 他就以他的最小二乘法和他那无比的计算技能确定了轨道,告诉天文学家的望远镜往那里去找,并且居

---

① 这一证明的思路在 F. Klein 的《从较高观点论初等数学》("Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint,"pp. 101—104)中有清楚的说明.

② 各行星到太阳的相对距离,若以地日距离为10, 形成一个数列 3.9, 7.2, 10.0, 15.2, 26.5, 52, 95.4, 192, 307. 而这个数列可从下面简单数列近似得出: 将

0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

乘以 3　　0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192; 384

再各项加 4, 得

4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196, 388(译者注).

③ 参看《论行星轨道》("De Orbitis Planetarum") 最末几页,载黑格尔全集第一卷(Frommann Verlag, 1965).

然找到了. 在别人努力统统失败了之后,他成功地重又发现了谷神星.

这一成就带给他声誉,使公爵增加他的年金,并在1807任天文学教授和格廷根新天文台的第一任台长. 他以那惯常的彻底精神执行他的任务,但结果是他讨厌当了教授之后所带来的那些行政琐事、会议、和官僚主义的繁文缛节. 他对教书也毫无兴趣,认为这是浪费他的时间,而且对于有才能的和没有才能的学生(出于不同的原因)基本上无用. 然而当他不得不教书的时候,他显然教得很出色. 他的一个学生——杰出的代数学家戴狄金(R. Dedekind),在50年之后还感到高斯的讲课是他"一生所听过的最好、最难忘的".[1] 高斯有许多机会离开格廷根,但他谢绝所有聘请,在那里渡过了他的余生——生活平静简朴,很少外游,以巨大的精力从事数学及其应用方面各式各样问题的研究. 除了科学和赡家之外(他结婚两次,有六个子女,其中二人移居美国),他的主要兴趣是历史和世界文学,国际政治以及财政事务. 他拥有约六千卷各种文字的藏书,包括希腊、拉丁、英、法、俄、丹、德许多文字的书籍. 他在处理个人财务问题的精明能干从下面事实可知一二: 他虽然几乎是白手起家的,但他死后所遗财产超过他后半生每年收入的百倍以上.

十九世纪头二十年间,高斯不断写出一些天文著作,其中最重要的是《天体运动理论》(Theoria Motus Corporum Coelestium, 1809). 在其后一百多年间此书成为行星天文学上的一本圣经. 书中处理摄动的方法,其后导致海王星的发现. 高斯把天文当作他的职业而把纯数学当作他的消遣,他时时发表个人研究中的一些成果. 他在超几何级数方面的伟大工作(1812)就是属于这一时期的. 这是一项典型高斯式的成果,充满了分析中的新思想,使他以后的数学家一直为之钻研.

---

[1] 戴狄金对听课的详细回忆载 G. W. Dunnington《高斯,科学巨人》("Carl Friedrich Gauss: Titan of Science" pp. 259, 261, Hafner, New York, 1955)一书中. 该书的用处主要在于有许多语录、有高斯所发表著述的文献目录,并列举高斯从1808到1854提出打算讲授(但往往并未讲授)的课程单.

1820年左右他应汉诺威(Hannover)政府之请主持该王国的大地测量工作，而这一工作的各项杂务(包括大量的野外工作和许多次单调乏味的三角测量)占了他好多年的时间．我们自然要认为象他这样的人才去做这种工作是浪费，但科学上的伟大思想常是以许多奇特的方式产生出来的．这些表面上枯燥的工作却使他对纯数学作出了他最深刻最有影响的贡献之一，没有这一工作，爱因斯坦的一般相对论就不可能有．

高斯的大地测量工作是要准确测量地球表面上的大三角形．这促使他产生出《关于曲面面积一般论述》(1827)("Disquisitiones generales circa snperficies curvas")中的思想，在这一著作中他奠定了关于一般曲面的内在微分几何①．这里他引入了曲面上的曲线坐标 u 及 v；得出了弧素 ds 的基本二次微分型 $ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$，使测地线的确定成为可能；提出了高斯曲率和总体曲率(integral curvature)的概念②．他的主要成果是著名的颖异定理(theorema egregium)，它指出高斯曲率只依赖于 E，F 及 G，因而是在曲面扭变下的不变量；还有在测地线三角形情况下关于总体曲率的高斯-波内(Gauss-Bonnet)定理，它的一般形式是现代大范围微分几何里的核心事实．除了细节上的发现之外，高斯见解的突出之点在于其内在这个词上，因为他指出怎样只凭曲面本身进行运算而不必管其所在的周围空间，就可以研究曲面．为把这事说得更具体些，我们设想有个二维空间的生灵，它居住在一曲面上而从不知道还有第三维或位在曲面以外的任何事物．如果这个生灵能够在曲面上走动，沿曲面测量距离，确定曲面上从一点到另一点的最短路线(测地线)，那末他也能测算任一点处的高斯曲率，搞

① 由 A. Hiltebeitel 和 J. Morehead 译出英文本 "General Investigations of Curved Surfaces"(Raven Press, Hewlett, N. Y., 1965).

② 这些概念在 C. Lanczos 所著《爱因斯坦及宇宙秩序》("Albert Einstein and the Cosmic World Order", Chap. 4, Interscience Wiley, New York, 1965)一书中有解释，而不用专门术语.

出关于该曲面的内容丰富的几何，而当且仅当这曲面的高斯曲率处处等于0时，这种几何才是欧氏(平面)几何．如果把这些概念推广到二维以上，那就向黎曼几何、张量分析和爱因斯坦的观点打开了大门．

这时期的另一伟大著作是1831年发表的关于四次剩余(biquadratic residues)的论文．这里他借助于一种新方法(纯粹从代数观点来处理复数)推广了他早年在数论中的一些发现．他把复数定义为有序的实数对，并给它的代数运算作了合适的定义，这样一来，就把围绕着复数的议论纷纷的混乱意见平息下去，而为以后 n 维空间的代数与几何铺平了道路．但这只是附带收获，他的主要目的是把数论中的思想推广到复数领域上去．他把复整数(现称为高斯整数)定义为复数 $a-ib$，其中 a 及 b 为普通整数；他引入质数的一个新概念，按照这个新的质数概念，3仍是质数，但 $5=(1+2i)(1-2i)$ 就不是；并且他也对这些整数和质数证明了唯一质因子分解定理．这论文中的思想开创了代数数论，这一领域从他那时起至今仍在不断稳步发展①．

从1830以后，高斯越来越多地从事物理研究，而凡是他所接触到的分支都有他所增添的贡献．在表面张力论里，他发展了能量守恒的基本概念并解决了变分法中最早涉及具有可变积分限的二重积分的问题．在光学方面，他引入了透镜组的焦距概念，发明了给望远镜和照相机作物镜用的高斯大角度透镜(它的色散畸变相对说来较少)．他几乎一手创立了地磁学，并且在他的朋友和同事W. 韦柏(Weber)的合作之下，建造和经管一处无铁的地磁观测所，创办了磁学联合会，以收集和公布从世界许多地方得来的数据，发明了电磁电报通讯和双焦测磁计(bifilar magnetometer)．在麦克士韦(James Clerk Maxwell)的名著《电磁学》(“**Treatise on Electricity and Magnetism**”)中许多地方指出要参考高斯的著作．麦克士韦在序言中说高斯“对磁学及其观

① 参看E. T. Bell《高斯及代数数的早期发展史》(“Gauss and the Early Development of Algebraic Numbers, National Math. Mag., vol. 18, pp. 188—204, 219—233, 1944).

察方法运用了他的强大智慧，他不仅使我们大大增加了对引力理论的知识，并且在所用仪器上，在观察方法及结果的计算上改造了整个磁学，因而他的地磁学著作，对一切从事于测量任何自然力的人来说，可以说是物理研究的典范.”1839年高斯发表了关于平方反比例力一般理论的基本论文，作为数学的一个自成一体的分支建立了势论①. 他照常要对这些事情熟思多年；在他的发现之中有：近代矢量分析中的散度定理(又叫高斯定理)，关于调和函数的基本均值定理，以及那个非常有用而日后称为“狄利克雷原理”的命题(它在1899年终于为希尔柏脱所证明).

以上讨论了高斯全部成就中已经公开发表的部分，但其未曾公开发表的私人保藏部分几乎同样可观. 在他死后人们仔细分析他在笔记本中和科学通信中的大量材料，并将它们收集在他的全集中，这些东西才公之于世. 他的科学日记前面已经说过. 这本只有19页的小册子是数学史上最珍贵的文献之一，它是直到1898年在高斯一个孙子的家藏信件堆中找出后才为世人所知的. 日记包括1796年到1814年这段时期，内含146项关于他研究结果的简明叙述，而这些都是他花了几个星期或几个月的劳动成果.②所有这些材料充分证明，高斯这些叙述得相当详细但只有他自己知道的思想，如果当时发表出来，那末即使他并没有做出他所发表的其他工作，也会使他成为当代最伟大的数学家.

例如，复变函数论是十九世纪数学的主要成就之一，而这门学科的核心事实是柯西积分定理(1827)以及解析函数的台劳展开式和罗朗展开式(1831, 1843). 高斯在他1811年致友人贝塞耳的信中明确提出了柯西定理，然后又说，“这是个很妙的定理，它的证明颇为简单，我将在适当时机发表. 它同别的一些有关级数展开式的有趣事实是分不开的”.③所以在这两个重要发现被公众承认的学者作出之前许多年，高

① 格林(George Green)的《数学分析对电磁学的应用》(1828)当时无人注意并几乎完全为人遗忘，直到1846年重印之后才知名.

② 参看高斯《全集》第10卷 pp.483—574, 1917.

③ 参看《全集》第8卷，p.91, 1900.

斯就已经知道柯西定理，而且或许也知道两个级数展开式. 但不知出于什么原因，发表的"适当时机"从未出现. 我们从他给 W. 鲍里耶 (Wolfgang Bolyai, 他从大学时代起的密友, 并终生保持通信关系)一封信中的话, 可能获得解释这一情况的原因. 他在信中说: "给予我最大愉快的事不是知识本身而是学习过程，不是所取得的成就而是得出成就的过程. 当我把一个问题搞清楚了并研究透澈了, 我就放下不管, 以便转而再去探索未知的领域". 他的脾气就象一个探险家, 如果他在结束一次探险后能立即开始作另一次探险，他就不愿化费时间来写他前一次探险的经过. 所以事情就是这样, 高斯虽然写出很多作品, 但要他把每一项基本发现都写成能使他自己满意的形式发表出来，那就需要有好几个长寿者的终生时间.

另一个例子是非欧几何，它对文明人思想冲击之大曾与哥白尼在天文学上的革命比美. 从欧几里德时代直到高斯的童年, 人们普遍认为欧几里德的公理是思维的必然规律. 然而欧几里德公理体系中有一个缺点早就受人注意, 这就是所谓平行公理, 说的是: 通过直线外一点, 只有一根直线平行于所给直线. 有人认为这个公理并非独立于其他公理之外，许多人想把它作为一个定理来证明而不得成功. 现在我们知道高斯十五岁时也参与这项工作并且也失败了. 但他之失败不同于前人，因他不久就得出了惊人的结论(这是他前人都没有想到的)：欧几里德形式的几何并非唯一可能的几何. 他多年来时断时续地按这种思想进行些研究，而到 1820 他已完全掌握了非欧几何的主要定理(这个名称也是他起的)①. 但他并没有把他的结果透露给人, 而 1829 及 1832 年罗巴切夫斯基及 J. 鲍里耶(W. 鲍里耶的儿子)各自独立地发表了他们在这方面的工作. 在这个问题上，高斯之所以守口如瓶的原因是很简单的. 当时德国知识界完全受康德哲学的支配，而康德体系的基本教条之一则认为欧氏几何是思考空间问题的唯一可能途径. 高斯知道

① 已知的他所写的关于几何基础的一切, 都发表在他的《全集》中，第八卷, pp. 159—268, 1900.

这个思想是完全错误的，也知道康德体系是建筑在沙堆上的．但他珍惜他平静的私生活，为免于浪费时间去同哲学家闹口角，他就沉默不语．1829 年他在给贝塞耳信中说："我对于这一问题(几何基础)的很广泛的研究，在很长时期内(也许终我一生)都不会写成可供发表的形式，因为深恐若把自己在这个问题上的意见完全说出来，就会听到那些皮奥兴人的尖声狂叫．"①

在椭圆函数论方面也有同样的情形．这是一门内容丰富的分析领域，主要是由阿倍耳在 1827 年和雅可比在 1828—1829 年发表的．高斯在这方面什么也没有发表，也不声称哪些发现是属于他的，因此当日后数学界慢慢知道，高斯发现阿倍耳和雅可比的许多结果是他早在二人出世之前就有了的，都为此感到惊异不止．阿倍耳幸而在 1829 年二十六岁时就早死了，免于得悉这一可能使他丧气的事，但雅可比却不得不咽下他的失望情绪继续干下去．事实真相部分是通过雅可比本人透露出来的．他注意到《论丛》(第 335 款)中有一段难懂的文字，它的意义只有知道点椭圆函数的人才能理解．他为此去找过几次高斯以便证实他所猜度的事，同时把自己最新的发现告诉高斯，每次去高斯都从他的抽屉里拿出 30 年之久的手稿，把雅可比所告诉的新发现指给他看．我们不难想象雅可比是多么失望丧气．但高斯此时对于个人声誉已经淡泊，实际上反而因为可以免去写文章论述他早已计划要发表的题材而感到高兴．1840 年雅可比在高斯那里作客一星期后写信给他的兄弟说："如果实际天文工作没有把这位巨大天才的精力，从他那光辉的事业中分散出去，数学的情况，将与今日大不相同．"

这就是高斯，至高无上的数学家．他在那么多方面的成就超过一个普通天才人物所能达到的水平，以致于我们有时会产生一种离奇的感觉，以为他竟是上界的天人．

① 《全集》第八卷 p. 200．皮奥兴人是古希腊一个部族，以愚蠢无知闻名，受雅典人轻视．

附录 D. 契比雪夫多项式及极大中的极小性质

在习题 30-6 中，我们用超几何函数来定义契比雪夫多项式 $T_n(x)$ 为 $T_n(x)=F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$，其中 $n=0, 1, 2, \cdots$. 当然，这个定义本身一点不说明问题. 因为重要的问题是：这些多项式有什么用？现在我们来回答这个问题.

先莫如用多项式 $T_n(x)$ 的另一种定义比较方便. 我们以后会看到这两种定义是一致的. 我们的出发点是这样一个事实：若 n 是个非负的整数，则复数理论里的棣莫佛(de Moivre)公式给出

$$\begin{aligned}\cos n\theta+i\sin n\theta&=(\cos\theta+i\sin\theta)^n\\&=\cos^n\theta+n\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta)\\&\quad+\frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}\theta(i\sin\theta)^2+\cdots+(i\sin\theta)^n,\end{aligned}\tag{1}$$

故 $\cos n\theta$ 是右边和式的实部，但这个和式中的各实数项正好是 $i\sin\theta$ 的偶次幂的项；又因 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$，故 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的多项式函数. 我们用这来定义 n 次契比雪夫多项式 $T_n(x)$ 是如下的多项式：

$$\cos n\theta=T_n(\cos\theta).\tag{2}$$

由于 $T_n(x)$ 是多项式，所以它对一切 x 值都有定义. 但若限制 x 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 内，并写 $x=\cos\theta$，而 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，则(2)变为

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x).\tag{3}$$

在同样条件限制下，可以得出 $T_n(x)$ 的另一个奇怪的式子. 若把下面两个公式相加

$$\cos n\theta\pm i\sin n\theta=(\cos\theta\pm i\sin\theta)^n,$$

得到

$$\cos n\theta=\frac{1}{2}[(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n]$$

$$=\frac{1}{2}[(\cos\theta+i\sqrt{1-\cos^2\theta})^n+(\cos\theta-i\sqrt{1-\cos^2\theta})^n]$$

$$=\frac{1}{2}[(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta-1})^n+(\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta-1})^n]$$

或

$$T_n(x)=\frac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n]. \tag{4}$$

若用二项公式把(1)写成

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cos^{n-m}\theta(i\sin\theta)^m,$$

那末还可以得出 $T_n(x)$ 的另一个显式. 因为上面已指出, 和式里的实数项相应于 m 为偶数值的项, 即相应于 $m=2k$, 其中 $k=0, 1, 2, \cdots, [n/2]$①. 由于

$$(i\sin\theta)^m=(i\sin\theta)^{2k}=(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k=(\cos^2\theta-1)^k,$$

故有

$$\cos n\theta=\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta(\cos^2\theta-1)^k,$$

因此

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{(2k!)(n-2k)!}x^{n-2k}(x^2-1)^k. \tag{5}$$

从(4)显然知道 $T_0(x)=1$ 及 $T_1(x)=x$; 但对于较大的 n 值, 莫如用一个递推公式来算最为方便. 若写出

$$\cos n\theta=\cos[\theta+(n-1)\theta]=\cos\theta\cos(n-1)\theta-\sin\theta\sin(n-1)\theta$$

及

$$\begin{aligned}\cos(n-2)\theta&=\cos[-\theta+(n-1)\theta]\\&=\cos\theta\cos(n-1)\theta+\sin\theta\sin(n-1)\theta,\end{aligned}$$

则由此可得

① 标准记号 $[n/2]$ 表示 $\leqslant n/2$ 的那个最大整数.

$$\cos\theta+\cos(n-2)\theta=2\cos\theta\cos(n-1)\theta.$$

若用(2)把 $\cos\theta$ 换为 x，便可从上面的三角恒等式得出所需要的递推公式：

$$T_n(x)+T_{n-2}(x)=2xT_{n-1}(x). \tag{6}$$

从 $T_0(x)=1$ 及 $T_1(x)=x$ 出发，从(6)可得出 $T_2(x)=2x^2-1$，$T_3(x)=4x^3-3x$，$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$ 等等。

超几何函数形式 为建立契比雪夫微分方程与上面定义的契比雪夫多项式之间的关系，我们利用这一事实：当多项式 $y=T_n(x)$ 中的自变量 x 通过 $x=\cos\theta$ 换成 θ 时，它就变成函数 $y=\cos n\theta$. 而函数 $y=\cos n\theta$ 显然是微分方程

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}+n^2y=0 \tag{7}$$

的一个解，而经过简单的运算把自变量从 θ 变回到 x 后，(7)就变成契比雪夫方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0. \tag{8}$$

因此我们知道 $y=T_n(x)$ 是(8)的一个多项式解. 但习题 30-6 告诉我们说(8)的多项式解只有 $cF\left(n,-n,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right)$那种形式的；又因(4)说明对于每个 n 都有 $T_n(1)=1$，而 $cF\left(n,-n,\frac{1}{2},\frac{1-1}{2}\right)=c$，故知

$$T_n(x)=F\left(n,-n,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right). \tag{9}$$

正交性 对于不同的 n 值，函数 $y_n(\theta)=\cos n\theta$ 的最重要性质之一是它们在区间 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上的正交性，即

$$\int_0^\pi y_my_nd\theta=\int_0^\pi\cos m\theta\cos n\theta d\theta=0 \quad (\text{若 } m\neq n). \tag{10}$$

为证明这事，写出 $y=\cos m\theta$ 及 $y=\cos n\theta$ 所满足的微分方程：

$$y_m''+m^2y_m=0 \quad \text{及} \quad y_n''+n^2y_n=0.$$

把第一式乘以 y_n，第二式乘以 y_m，再相减，得到

$$\frac{d}{d\theta}(y'_m y_n - y'_n y_m) + (m^2-n^2)y_m y_n = 0;$$

把上式每项从 0 积分到 π，则由于 y'_m 及 y'_n 在积分限都等于 0 而 $m^2-n^2\neq 0$，就立即得出(10)。

当(10)中的自变量从 θ 换为 $x=\cos\theta$，(10)就变为

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=0 \qquad (\text{若 } m\neq n). \tag{11}$$

对这事实通常的说法是：契比雪夫多项式在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上对于**权函数** $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 是**正交的**。当(11)中的 $m=n$ 时，我们有

$$\int_{-1}^{1}\frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & (n\neq 0),\\ \pi & (n=0).\end{cases} \tag{12}$$

上述命题来自

$$\int_0^{\pi}\cos^2 n\theta=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & (n\neq 0),\\ \pi & (n=0).\end{cases}$$

而这是可以通过直接积分来证明的。

正如附录 B 中所讨论的厄尔米多项式的情形一样，正交性(11)及(12)可用来将一"任意"函数 $f(x)$ 展开为**契比雪夫级数**：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n T_n(x). \tag{13}$$

通过象以前那样的形式运算，可得系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{14}$$

及(对 $n>0$)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx. \tag{15}$$

这里真正的数学问题仍是：在什么条件下级数(13)(其中的 a_n 由(14)及(15)确定)确实收敛于 $f(x)$。

极大中的极小性质 现在要讨论的这个契比雪夫问题，是要考察在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上函数 x^n 能为 $n-1$ 次多项式 $a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 逼近到什么程度；也就是要看看数

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|x^n-a_{n-1}x^{n-1}-\cdots-a_1x-a_0|$$

在适当选取系数后能够小到什么地步．这个问题又等价于下列问题：在所有首项系数为 1 的 n 次多项式 $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 中，求数

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|$$

的极小值，如若可能，试求取这极小值的一个多项式．

我们从 $T_1(x)=x$ 和递推公式(6)显然可知：当 $n>0$ 时 $T_n(x)$ 中 x^n 的系数是 2^{n-1}，故 $2^{1-n}T_n(x)$的首项系数是 1．这些多项式完全解决了契比雪夫问题，就是说它们具有独特的

极大中的极小性质 在所有首项系数为 1 的 $n>0$ 次多项式 $P(x)$中，$2^{1-n}T_n(x)$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上偏离 0 最小：

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|\geqslant\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|2^{1-n}T_n(x)|=2^{1-n}. \tag{16}$$

证明　　首先，(16)中的等式部分可由下式立即得知：

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|T_n(x)|=\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}|\cos n\theta|=1.$$

为完成论证，假定 $P(x)$ 是所说这类多项式，然而

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|<2^{1-n}, \tag{17}$$

然后我们从这一假定推出矛盾．首先注意，多项式 $2^{1-n}T_n(x)=2^{1-n}\cos n\theta$ 在相应于 $\theta=0, \pi/n, 2\pi/n, \cdots, n\pi/n=\pi$ 的 $n+1$ 个 x 点处，交互取正负值 $2^{1-n}, -2^{1-n}, 2^{1-n}, \cdots, \pm 2^{1-n}$．根据假定 (17)，$Q(x)=2^{1-n}\cdot T_n(x)-P(x)$在这些点处与 $2^{1-n}T_n(x)$有相同的正负号，因而在区间$-1\leqslant x\leqslant 1$ 内至少有 n 个零点．但由于 $Q(x)$ 是个不恒等于 0 且至多为 $n-1$ 次的多项式，这是不可能的．

在这一非常简单的论述中，遗憾的是极大中的极小性质好比是从

天上掉下来的，既没有来龙去脉，也没有提到为甚么契比雪夫多项式会有这种特殊的性质．但按契比雪夫原来的整个思想说，这个惊人的性质实际上是来得很自然的，读者可以放心[①]．对于那些希望知道所学数学的具体应用的读者，我们可以告诉他们，极大中的极小性质是同契比雪夫多项式在近代数值分析法中的重要地位密切相关的．

关于契比雪夫的注记 契比雪夫（1821—1894）是十九世纪最杰出的俄国数学家．他是著名几何学家罗巴切夫斯基（1793—1856）的同时代人，但他的工作在整个西欧有远为深刻的影响，并被人认为是过去一个世纪里俄国伟大数学学派的创始人．

他儿时就倾心喜爱机器玩具，并因认识到几何对于了解机器的重要性而爱好数学．他在莫斯科求学之后成为彼德堡大学教授直到他退休．他父亲是俄国贵族，但自1840闹饥荒后，家业萧条，以致嗣后契比雪夫不得不过俭朴生活而且从未结婚．他把他的非薄收入用于购买机器模型以及偶尔去西欧旅行，他特别欣赏那里的风车、蒸汽机等等．

契比雪夫是非常多才的数学家，对于用初等方法解决难题具有罕见的专长．他大部分精力化在纯数学上，但也重视数学的实际应用，例如他曾说："使数学脱离科学的实际需要，就好比把母牛关起来不让它接触公牛，其结果是使它不出成果．"他的工作涉及许多领域，但其最主要的成就在概率论，数论，函数逼近论（那是由于他对机器的兴趣而引起的）．

在概率论方面他引入了许多新概念，如数学期望，随机变量和与算术中值的离差，并根据现今所谓的契比雪夫不等式，对大数定律作出了巧妙简单的证明，又对中心极限定理作了广泛的研究．他被人认为是一大批对数理概率论有贡献的著名俄国数学家之父，其中包括 **A. A.** 马尔可夫，**S. N.** 伯恩斯坦，**A. N.** 柯尔莫戈罗夫，**A. Y.** 辛欣等人．

十九世纪四十年代末，契比雪夫协助准备欧拉一些著作的出版工作．看来这项工作使他转而注意数论，特别是那个很难的质数分布问题．读者也许早知道，**质数** $p>1$ 是只有 1 及 p 为正因子的那种整数．头几个易知的质数是 2, 3, 5, 7, 11,

---

① 赋有坚韧怀疑精神的读者，自然不会接受这种保证，而必须亲自检验，那他可以参阅 N. I. Achieser《逼近论》("Theory of Approximation", Ungar, New York, 1956)；E. W. Cheney《逼近论引论》("Introduction to Approximation Theory," McGraw-Hill, New York, 1966)；或 G. G. Lorentz《函数的逼近》("Approximation of Functions," Holt, New York, 1966)．

13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ….质数在所有正整数里的分布显然是不规则的,因越往后，质数出现得越少，然而仍然有许多成对的质数紧挨着而只相差一个偶数 2．发掘它们出现的规律（以及了解其原因），这是几百年来引起人们好奇心的一个问题．1751 年欧拉曾用如下的话表达他对这个问题的无能为力：“数学家想找出质数数列的规律，迄今徒劳，因而我们有理由相信，这可能是人类智慧所无法深究的一个神秘”.

许多人试图寻找第 n 个质数的简单公式以及头 n 个正整数里质数的确切个数.所有这些工作都失败了，只是等到数学家另行寻找质数在正整数里的平均分布时，工作才获得真正的进展.通常我们用 $\pi(x)$来记小于或等于 x 的质数个数.例如 $\pi(1)=0$, $\pi(2)=1$, $\pi(3)=2$, $\pi(\pi)=2$, $\pi(4)=2$, 等等．高斯在青年时代就用经验方法研究 $\pi(x)$，以便用一简单函数来逼近它，而使其在 x 取大值时有小的相对误差．他根据观察猜测(也许在他十四、五岁时) $x/\log(x)$ 是个好的近似函数，意即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log(x)}=1. \tag{18}$$

这个命题就是著名的**质数定理**，而根据现有材料，高斯从未能对此作出丝毫证明.

契比雪夫并不知道高斯有这一猜测，他是对这问题作出可靠结论的第一个数学家．他在 1848 及 1850 证明了，对于足够大的 x,

$$0.9213\cdots<\frac{\pi(x)}{x/\log x}<1.1055\cdots, \tag{19}$$

并且证明，若极限(18)存在，它的值必等于 1[①]．作为这一工作的副产品，他又证明了贝尔特兰(Bertrand) 的假设：对于每个整数 $n\geq 1$，存在一个质数 p 适合 $n<p\leq 2n$．契比雪夫并未能最后证明质数定理(这是 1896 年证明的)，但他的工作激发许多别的数学家去搞这个问题．我们在附录 E 里对于黎曼作注记时还要讲这个问题.

附录 E. 黎曼方程

本附录的目的是要了解高斯超几何方程

$$x(1-x)y''+[c-(a+b-1)x]y'-aby=0 \tag{1}$$

的结构．我们在第 30 及 31 节中知道这个方程正好有三个正则奇异点，而且在点 $x=0$ 及 $x=1$ 处至少有一个指数的值是 0. 我们将证明,

---

① (19)左边的数是 $A=\log 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}30^{-\frac{1}{30}}$，而右边的数是 $\frac{6}{5}A$.

(1)可由这些性质完全确定，也就是说，若假定一般方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{2}$$

具有这些性质，则(2)必然具有(1)的形式.

首先，我们记得在第31节讲过，若把(2)中的自变量从 x 变到 $t=\frac{1}{x}$，(2)就变为

$$y''+\left[\frac{2}{t}-\frac{P(1/t)}{t^2}\right]y'+\frac{Q(1/t)}{t^4}y=0, \tag{3}$$

这里的撇是指对 t 求导. 从(3)显然可见，若 $x=\infty$ 不是(2)的一个寻常点且函数

$$\frac{1}{t}P\left(\frac{1}{t}\right) \quad 及 \quad \frac{1}{t^2}Q\left(\frac{1}{t}\right)$$

在 $t=0$ 处解析，则 $x=\infty$ 是(2)的一个正则奇异点.

现在我们明确假定(2)有正则奇异点 $x=0, x=1$，及 $x=\infty$，而所有其它的点都是它的寻常点. 于是 $xP(x)$ 在 $x=0$ 解析，$(x-1)P(x)$ 在 $x=1$ 解析，因而 $x(x-1)P(x)$ 在 x 的一切有限值处解析：

$$x(x-1)P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n. \tag{4}$$

若作置换 $x=\frac{1}{t}$，则(4)变为

$$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)P\left(\frac{1}{t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{t}\right)^n,$$

故

$$\frac{1}{t}P\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{t}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{t}\right)^n=\frac{1}{1-t}\left(a_0 t+a_1+\frac{a_2}{t}+\cdots\right).$$

由于 $x=\infty$ 是(2)的一个正则奇异点，这个函数必在 $t=0$ 解析. 由此得知 $a_2=a_3=\cdots=0$，故由(4)得出

$$P(x)=\frac{a_0+a_1 x}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}, \tag{5}$$

其中 A 及 B 为某两个常数．同样，$x^2(x-1)^2Q(x)$ 在 x 的一切有限值处解析，故

$$x^2(x-1)^2Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

$$\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)^2Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{t}\right)^n,$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2}Q\left(\frac{1}{t}\right)&=\frac{t^2}{(1-t)^2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{t}\right)^n\\&=\frac{1}{(1-t)^2}\left(b_0t^2+b_1t+b_2+\frac{b_3}{t}+\cdots\right).\end{aligned}\tag{6}$$

和以前一样，$x=\infty$ 是(2)的一个正则奇异点这个假定，说明(6)在 $t=0$ 处必为解析，故 $b_3=b_4=\cdots=0$，从而

$$Q(x)=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}+\frac{E}{x-1}+\frac{F}{(x-1)^2}.\tag{7}$$

但(6)在 $t=0$ 附近有界这一事实说明 $x^2Q(x)$ 对于大的 x 值为有界，故

$$x^2\left(\frac{C}{x}+\frac{E}{x-1}\right)=x^2\left[\frac{(C+E)x-C}{x(x-1)}\right]$$

也是有界的因而 $C+E=0$．这就使我们能把(7)写成

$$Q(x)=\frac{D}{x^2}+\frac{F}{(x-1)^2}-\frac{C}{x(x-1)};\tag{8}$$

于是根据(5)及(8)，可把方程(2)写为形式

$$y''+\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}\right)y'+\left[\frac{D}{x^2}+\frac{F}{(x-1)^2}-\frac{C}{x(x-1)}\right]y=0.\tag{9}$$

设相应于正则奇异点 0, 1, 及∞的指数分别为 α_1 及 α_2，β_1 及 β_2，γ_1 及 γ_2．这些数是这三个点处指数方程的根：

$$m(m-1)+Am+D=0,$$

$$m(m-1)+Bm+F=0,$$

$$m(m-1)+(2-A-B)m+(D+F-C)=0.$$

头两个方程可以从观察(9)直接写出，但第三个方程需要根据(3)稍作运算才能写出．现若把以上三式写成

$$m^2+(A-1)m+D=0,$$

$$m^2+(B-1)m+F=0,$$

$$m^2+(1-A-B)m+(D+F-C)=0,$$

则根据二次方程的根与系数间的熟知关系，得到

$$\begin{aligned}
&\alpha_1+\alpha_2=1-A, && \alpha_1\alpha_2=D,\\
&\beta_1+\beta_2=1-B, && \beta_1\beta_2=F,\\
&\gamma_1+\gamma_2=A+B-1, && \gamma_1\gamma_2=D+F-C.
\end{aligned} \tag{10}$$

从第一列的三式，显然有

$$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1; \tag{11}$$

故利用(10)可把(9)写成

$$\begin{aligned}
y''&+\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{x}+\frac{1-\beta_1-\beta_2}{x-1}\right)y'\\
&+\left[\frac{\alpha_1\alpha_2}{x^2}+\frac{\beta_1\beta_2}{(x-1)^2}+\frac{\gamma_1\gamma_2-\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}{x(x-1)}\right]y=0.
\end{aligned} \tag{12}$$

上式叫**黎曼方程**，而(11)叫**黎曼恒等式**．

这个结论的定性内容可解释如下：若规定(2)只有三个正则奇异点 $x=0$, $x=1$, 及 $x=\infty$ 并规定每点处的指数值，则(2)的具体形式就完全确定．

现在我们再加上一个条件，即在点 $x=0$ 及 $x=1$ 处至少都有一个指数的值是0，比方说有 $\alpha_1=\beta_1=0$，则稍作简化并借助于(11)，可把黎曼方程化为

$$x(1-x)y''+[(1-\alpha_2)-(\gamma_1+\gamma_2+1)x]y'-\gamma_1\gamma_2y=0,$$

这里若引入通用的记号 $a=\gamma_1$, $b=\gamma_2$, $c=1-\alpha_2$，上式显然就变成高斯方程(1)．因此，方程(12)有时叫**广义超几何方程**．

上述结果只不过是黎曼所创影响深远的微分方程论中的头几步．那个理论的目标之一，是以尽可能简单的方式，来刻划所有那些能

以高斯超几何函数来表示其解的微分方程. 另一个目标是根据奇异点的数目和性质,来对系数为有理函数的所有微分方程,进行有系统的分类. 通过这一分类得出了一项惊人的结果: 数学物理中产生的几乎所有这类方程,都可通过正则奇异点的合流从如下一个单独的方程得出: 该方程具有五个正则奇异点,而每一点处的指数之差为$\frac{1}{2}$①.

关于黎曼的注记 黎曼(Bernhard Riemann, 1826—1866)是德国北部一个穷苦乡村牧师的儿子, 他对二十世纪数学影响之深超过任何别的伟大学者. 他在中学时代就钻研欧拉和勒让特的著作, 并据说在不到一星期的时间内掌握了勒让特的数论著述. 但他是个腼腆谦逊的人,并不认识到自己具有非凡的才能,因此在十九岁时上格廷根大学攻神学,打算将来也当牧师,以博他父亲的欢心. 但幸而他不久就打消了这番孝心,并在他父亲的赞许之下转而攻读数学.

有神话式的人物高斯在那里, 格廷根自然而然就成为数学界的中心. 但高斯是个可望而不可及的人,特别对于新生更是如此,所以黎曼在这不惬意的环境里学了一年之后便转到柏林大学. 在那里他受到狄利克雷和雅多比的友爱重视, 并从他们二人那里学到不少本事. 两年之后他又回格廷根,于1851年在那里获博士学位. 在其后的八年中, 他忍受了难捱的清贫而写出了他最伟大的著作. 1854年他被任为编外讲师(没有正式工资的讲师), 这在当时是进入高等学府工作的第一步必由之阶. 1855 年高斯去世, 狄利克雷应聘到格廷根继他的职. 狄利克雷尽一切力量帮助黎曼,先让他享有微薄工资(大约是一个正教授工资的十分之一),然后提升他为付教授. 1859年狄利克雷也去世了, 黎曼被任为正教授接替他. 黎曼的穷日子捱过去了,但他的身体已经垮了. 为了躲开德国北部寒冷潮湿的气候,他去意大利旅行过几次,但在最后一次的旅程中因肺结核死于意大利. 黎曼一生短促,发表的作品相对说来较少,但他的工作永远改变了数学在分析、几何与数论方面的进程②.

---

① 要完全理解这些进一步的事实需要掌握复函分析的基本原理. 然而不具备这种知识的读者也可从下列书中获得一些有用的印象: E. T. Whittaker and G. N. Watson《近世分析》("Modern Analysis", pp. 203—208, 1935), 或 E. D. Rainville《中级微分方程》("Intermediate Differential Equations", Chap. 6, 1964).

② 他的《全集》只有一卷(1953 Dover 出版社重印), 其中三分之二的篇幅是他死后发表的材料. 他自己发表的九篇论文中,只有五篇是关于纯数学方面的.

他发表的第一篇论文是1851年关于复变函数一般理论的名作[①]. 黎曼在这论文中的基本目标是要使解析函数这一概念摆脱任何显式表示(例如幂级数)的束缚，而注重于一般原理及几何概念. 他把他的理论建立在今日所谓柯西-黎曼方程之上，创立了巧妙的黎曼曲面这个工具，以说明多值函数的性质，并引向黎曼映射定理. 高斯对他同时代人的数学成就是很少赞扬的，但他在一份正式报告中却热情嘉奖黎曼的工作："黎曼先生提出的论文是一种令人信服的证据，说明作者对他所论述的那些题材有彻底而深入的研究，说明他具有创造性的、活跃的和真正数学家的头脑，并具有辉煌而丰富的独创精神."

黎曼以后运用这些思想来研究超几何函数与阿倍耳函数. 在他论述阿倍耳函数的著作中，他把几何推理与物理洞察力结合得很出色，而后者则体现为势论中的狄利克雷原理的形式. 他利用黎曼曲面作为沟通分析与几何的桥梁，使函数的最深刻的解析性质有可能用几何语言来表达. 他那了不起的直观能力，使他只要设想闭曲面上可能有的构形并对这些曲面做理想的物理试验，就可发现函数的深刻解析性质——例如他对黎曼-罗赫定理 (Riemann-Roch theorem) 的叙述方式就是这样. 黎曼在复函分析中的几何方法是拓朴学的真正开始，而拓朴学是研究图形在连续变形下保持不变的那些性质的一门内容丰富的几何.

1854年当局要求他递交一篇鉴定论文以便接纳他为编外讲师，他的反应是写出一篇思想丰富的成熟著作，其不可磨灭的影响仍铭刻在现代数学之中[②]. 他所讨论的问题是分析一个函数能为其福氏级数所表达的狄利克雷条件(1829). 这里面的一个条件是函数必须可积. 但可积表示什么意思？狄利克雷用的是柯西的可积性定义，这只适用于连续函数或充其量具有有限个间断点的函数. 黎曼从数论中出现的一个函数体会到这一定义必须予以推广. 他阐释了如今在大多数微积分教科书中所讲的黎曼积分概念，建立了这种积分存在的必要充分条件，推广了保证福氏展开式成立的狄利克雷条件. 康托尔的著名集合论就是在这篇论文中所提一个问题的直接启发下搞出来的，而集合论概念又引向勒贝格积分以及更一般的积分概念. 所以黎曼的初创研究又是走向一门新数学分支——实变函数论的开头几步工作.

无穷级数论中的黎曼重排定理也是上述论文中的一项偶然结果. 狄利克雷曾

---

① 题为《一元复变量函数一般理论基础》("Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse") 见《全集》pp. 3—43.

② 《论函数能用一个三角级数表达的问题》("Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe")，见《全集》pp. 227—264.

举例说明一个条件收敛级数的和在重排项的次序后可以改变，这事黎曼是熟悉的，例如

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\log 2, \tag{13}$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\log 2. \tag{14}$$

在这里，具有同样一些项的级数显然具有不同的和；因在(14)中的项是：(13)中的头两个正项之后接第一个负项，然后是其次两个正项之后接第二个负项，如此等等．黎曼证明：可以把任一条件收敛级数的项适当重排，使新级数收敛于任一预先指定的和，或发散为∞或－∞．

除了这篇鉴定论文之外，大学当局在任命他当这个不领工资的讲师职务以前，还要求他在教授集团面前进行一次试讲．按惯例试讲的人要提出三个题目，而系主任通常总让他讲第一个题目．黎曼胆大包天地把几何基础列为他的第三个题目，这是一个深奥的题目，对此他是没有准备的，而高斯却早在心头盘旋了 60 年之久的．高斯自然怀着好奇的心情想看看这位候补讲师的"辉煌而丰富的独创精神"怎样来对付这一挑战，因而就指定这一题目让他来讲，这使黎曼大伤其脑筋．黎曼立即摆脱他当时深感兴趣的其他研究——"我对于电，磁，光与引力之间的关系的研究"——而在这之后的两个月内写出了他的讲稿．结果又是一篇数学经典巨著，而且可能是有史以来最重要的一次学术讲演①．据记载当时连高斯也为之惊异赞赏．

黎曼在他的讲演里用非行家的普通语言，对所有已知的几何——包括欧氏几何与非欧几何，作了气吞山河的概括．这个数学领域现今叫做黎曼几何，它除了在纯数学上极为重要之外，竟然还在 60 年之后为爱因斯坦的广义相对论提供了最合适不过的骨架子．正如大多数伟大的科学思想那样，如果抛开它的技术细节而集中注意其基本精神，黎曼几何是很容易理解的．我们先追述高斯在他之前 25 年发现的关于曲面的内在微分几何．若嵌入三维空间内的一个曲面通过参量用三个函数 $x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$ 以及 $z=z(u, v)$ 来定义，则可把 u 及 v 解释为曲面上的坐标点．曲面上两邻近点 (u, v) 及 $(u+du, v+dv)$ 之间的距离 ds 由高斯二次微分齐式给出

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

① 题为《论作为几何基础的诸公设》("Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen")，见《全集》pp. 272—286．在 D. E. Smith 的《数学资料》("A Source Book in Mathematics")中有英译文．

其中 E, F, 及 G 是 u 及 v 的某些函数. 有了这个微分齐式, 就可计算曲面上的曲线弧长、求测地(最短距离)线, 并计算曲面上任一点处的高斯曲率, 而可以完全不管周围空间. 黎曼抛弃了关于周围(欧氏)空间的想法, 并引入 n 维点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的连续流形概念, 而对此进行推广. 然后, 他对于相近的两点

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 及 } (x_1+dx_1, x_2+dx_2, \cdots, x_n+dx_n),$$

利用二次微分齐式

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx_i dx_j \tag{15}$$

来给它们任意规定一个距离(或度量) ds, 这里 g_{ij} 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一些合适的函数, 而不同的几批 g_{ij} 就在所论流形上定出不同的黎曼几何. 接着他考察黎曼流形上的曲率概念并研究常曲率的特殊情形. 所有这一切要依赖于大量的复杂计算, 而这些他在讲演中略去了, 以免伤听讲者的脑筋, 但详述在他死后发表的一篇论热传导的著作中. 在那个著述中黎曼明确引入了黎曼曲率张量, 这个量在 $n=2$ 的情形就化为高斯曲率, 而他证明这个量之等于 0 是所给二次度量等价于欧氏度量的必要充分条件. 根据这一观点, 曲率张量之值就表明了(15)式所定义的黎曼几何偏离欧氏几何的程度. 爱因斯坦曾用一句话概括了这些思想: "n 维空间黎曼几何与 n 维空间欧氏几何之间的关系, 好比是曲面的一般几何与平面几何之间的关系一样."

在变分法里可得出哈米尔顿原理的一个推论, 这是说明测地线物理意义的最简单形式: 若限定一质点在曲面上移动而不受其他力的作用, 则它会沿测地线滑动①. 广义相对论的核心就是这一思想的一个直接推广, 而广义相对论基本上是一种引力理论. 爱因斯坦认为空间的几何是那样一种黎曼几何, 其中曲率和测地线要由物质分布情况来确定; 在这卷曲的空间里, 行星之所以循着其轨道在太阳四周绕行, 只不过是沿着它们的测地线移动, 而并非由于受那神秘引力的拉紧而采取弯曲运动路线的, 因为引力的本性谁也没有真正理解.

1859 年黎曼发表了他在数论方面的唯一著作, 这是关于质数定理的一篇不到 10 页的极为深刻的论述②. 这一伟大工作在纯数学的好些分支里掀起了浪潮, 而它的影响也许在今后一千年内还会觉察到. 他的出发点是欧拉在一百年以前发现的一个了不起的恒等式: 若 s 是个大于 1 的实数, 则

---

① 这事在第九章附录 B 中有证明.

② 题为《论小于一所给数的质数个数》("Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse"), 载《全集》pp. 145—153. 又参阅附录 D 关于契比雪夫注记中对质数定理的叙述.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-(1/p^s)},\tag{16}$$

这里右边的式子表示相应于一切质数 p 的数 $(1-p^{-s})^{-1}$ 的乘积. 为了解这个恒等式是怎么来的, 我们注意对于 $|x|<1$ 有 $1/(1-x)=1+x+x^2+\cdots$, 故对于每一个 p, 我们有

$$\frac{1}{1-(1/p^s)}=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots.$$

令 p 取所有的质数值, 然后把所有这些级数乘起来, 同时利用每个整数 $n>1$ 可唯一表示为不同质数幂乘积这个事实, 便可看出

$$\begin{aligned}\prod_p\frac{1}{1-(1/p^s)}&=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}-\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)\\&=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\end{aligned}$$

这就是恒等式(16), 而(16)左边级数之和显然是实变量 $s>1$ 的一个函数, 同时这个恒等式建立了这函数的性态与质数性质之间的一种连系. 欧拉自己也从多方面探索了这一连系, 但黎曼认识到只有让 s 成为一个复变量, 才能更深入探索质数分布的情况. 他把这复函数记为 $\zeta(s)$, 而从此以后这函数就叫黎曼 ζ(读 *zeta*)函数:

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots,\quad s=\sigma+it.$$

黎曼在他的论文中证明了这个函数的一些重要性质, 并简单断言了几个其他的性质而未予证明. 在他死后百年间, 世界许多最优秀的数学家尽了最大的努力想证明他的这些断言, 并在作出这些努力的过程中在分析上创立了新的内容丰富的分支. 第一个获得成功的人是阿达马 (J. Hadamard, 1893), 而嗣后除了一个断言之外其余都按黎曼所期望的那样得到解决①. 那个尚未解决的例外是著名的黎曼假设: $\zeta(s)$ 在带形域 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 里的所有零值点都位在中央线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上. 这在今日仍然是数学上尚未解决的最重要问题, 而且也许是人类智慧所能想得出来的最难问题. 在他遗稿的零碎杂记中, 黎曼说这些定理是在他寻求"函数 $\zeta(s)$ 的表达式

---

① 阿达马的这项工作促使他在 1896 年证明了质数定理. 参看 E. C. Titchmarsh《黎曼 ζ 函数论》第三章. 该书附有文献目录共 326 件.

时得出来的，而这表达式我还没有把它化简到可供发表的程度"[①]. 1944 年阿达马在提到这篇杂记时不无道理地生气说："这表达式究竟是个什么样子的东西我们还是连一点影子都没有看到"[②]、他接着又说，"一般说黎曼的直观是高度几何性的；但对他的这篇数论文章来说情形却并非如此，那里这种直观本应是最起作用并且最神秘莫测的。"

① 见《全集》p. 154.

② 《数学领域里创造发明的心理研究》("The Psychology of Invention in the Mathematical Field", p. 118, 1954).

第六章　数学物理中的某些特殊函数

32. 勒让特多项式

这一节及下一节全部讲勒让特多项式的定义并建立它的一些特殊性质，内容是技术性的．读者自然会问要这些繁琐的技巧干什么，或者更一般地，究竟为什么要研究勒让特多项式．最简单的回答是，勒让特多项式在数学物理上有许多重要应用，而这些应用又需要懂得这些技巧．为让那些想亲自知道其究竟的读者感到放心，我们在附录 A 里讨论了物理背景和一些典型的应用．但是我们还有另一方面的理由可以作为回答，这理由的实用主义成份较少，但对以后所处理的贝塞耳函数也同样适用．这就是对特殊函数及其个别性质的研究，可对数学中有时占主导地位的抽象观念起一种有益的平衡作用．此外，我们列举一些在叙述本章内容时自然会出现的几项内容，它们对于所有学数学的人是不会不感兴趣的：γ（读如嘎马）函数及公式$\left(-\frac{1}{2}\right)!=\sqrt{\pi}$；正切函数的兰伯特连分式

$$\tan x=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-\cdots}}};$$

以及有名的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\qquad 及\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},$$

它们的和是欧拉早在十八世纪初就发现了的，而它们又在以后讨论贝塞耳函数的零值点时意外地出现了．

现在关于勒让特多项式本身，我们通过超几何方程来对它进行讨

论①.

在第 27 节中，我们以勒让特方程为例，来说明在寻常点处求幂级数解的方法．根据附录 A 中有所说明的理由，现在我们把这方程写成如下形式：

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0, \tag{1}$$

这里 n 应理解是个非负的整数．读者记得第 27 节中求得的(1)的所有的解在区间 $-1<x<1$ 上都是解析的．然而在应用问题上最有用的解是在 $x=1$ 附近有界的那些解，而为了便于把这些解单独拿出来考虑，我们把自变量从 x 变到 $t=\frac{1}{2}(1-x)$．这就使 $x=1$ 相应于 $t=0$，并把(1)变为

$$t(1-t)y''+(1-2t)y'+n(n+1)y=0, \tag{2}$$

这里的撇表示对 t 求导．这是超几何方程，它的 $a=-n$, $b=n+1$，而 $c=1$，故它在 $t=0$ 附近有下列多项式解：

$$y_1=F(-n, n+1, 1, t). \tag{3}$$

由于(2)在原点处的指数都是 $0(m_1=0$ 及 $m_2=1-c=0)$，故得用第 16 节的方法来求第二个解．这第二个解是 $y_2=vy_1$，其中，通过初等积分法，

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P\,dt} = \frac{1}{y_1^2}e^{\int \frac{2t-1}{t(1-t)}dt} \\ &= \frac{1}{y_1^2\,t(1-t)} = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{y_1^2(1-t)}\right]. \end{aligned}$$

由于 y_1^2 是具有常数项 1 的多项式，故右边方括号里的式子是形如 $1+$

---

① 勒让特(Adrien Marie Legendre, 1752—1833)是在研究椭球体的引力时碰到以他命名的多项式的．他是个很好的法国数学家，然而生不逢辰，亲眼看到他大部分最得意的工作都被更年青和更有才能的人所超过，例如在椭圆积分，数论，最小二乘方法方面的工作都是如此．他化了 40 年功夫研究椭圆积分，他对这个问题的两卷论著刚出版，阿倍耳和雅可比的发现就使这领域的面目完全改观．但他那慷慨大度的精神也是很不寻常的，因为他总是一再地欢迎更新更好的工作出现，虽然那会使他自己的工作变得陈旧过时．

$a_1t+a_2t^2+\cdots$的解析函数，从而有

$$v'=\frac{1}{t}+a_1+a_2t+\cdots.$$

这就得出 $v=\log t+a_1t+\cdots$，故

$$y_2=y_1(\log t+a_1t+\cdots)$$

于是(2)在原点附近的通解是

$$y=c_1y_1+c_2y_2. \tag{4}$$

因 y_2 里含有 $\log t$ 项，故当且仅当 $c_2=0$ 时(4)在 $t=0$ 附近为有界. 若把(3)中的 t 换为$\frac{1}{2}(1-x)$，则知(1)的在 $x=1$ 附近有界的解正好就是多项式 $F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right)$的常数倍.

这就使我们得到下面的基本定义. 记为 $P_n(x)$ 的第 n 个勒让特多项式的定义是

$$P_n(x)=F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right)=1+\frac{(-n)(n+1)}{(1!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$+\frac{(-n)(-n+1)(n+1)(n+2)}{(2!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2+\cdots$$

$$+\frac{(-n)(-n+1)\cdots[-n+(n-1)](n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(n!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^n$$

$$=1+\frac{n(n+1)}{(1!)^2 2}(x-1)+\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(2!)^2 2^2}(x-1)^2$$

$$+\cdots+\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}(x-1)^n. \tag{5}$$

我们从第 27 节知道 $P_n(x)$ 是 n 次多项式，且按 n 为偶数或奇数而只含偶次或奇次的项. 故可写为

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-4}x^{n-4}+\cdots \tag{6}$$

这和式的最末项在 n 是偶数时为 a_0，在 n 是奇数时为 a_1x. 由(5)显见对于一切 n 有 $P_n(1)=1$，又由于(6)，我们还有 $P_n(-1)=(-1)^n$.

用上面这种形式的公式(5)来研究 $P_n(x)$ 是很不方便的，故得找比

较简单的式子．我们可以把(5)中每一项展开，合并 x 的同幂项，把结果安排成(6)那种形式，不过这太麻烦，并无必要．我们要做的是从(5)可以看出 $a_n=(2n)!/(n!)^2 2^n$，然后从 a_n 递推算出 $a_{n-2}, a_{n-4}, \cdots$．这里所需要的是公式 27-(9)，但须把其中的 p 换成 n 而 n 换成 $k-2$：

$$a_k=-\frac{(n-k+2)(n+k-1)}{(k-1)k}a_{k-2},$$

或

$$a_{k-2}=-\frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n+k-1)}a_k.$$

取 $k=n, n-2, \cdots$，由此得

$$a_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n,$$

$$a_{n-4}=-\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}a_n,$$

等等，故(6)变为

$$P_n(x)=\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}\right.$$
$$\left.+\cdots+(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{2^k k!(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)}x^{n-2k}+\cdots\right]. \tag{7}$$

由于

$$n(n-1)\cdots(n-2k+1)=\frac{n!}{(n-2k)!}$$

及

$$(2n-2k+1)(2n-2k+3)\cdots(2n-3)(2n-1)$$
$$=\frac{(2n-2k+1)(2n-2k+2)(2n-2k+3)\cdots(2n-3)(2n-2)(2n-1)2n}{(2n-2k+2)\cdots(2n-2)2n}$$
$$=\frac{2n!}{(2n-2k)!}\frac{1}{2^k(n-k+1)\cdots(n-1)n}=\frac{(2n)!(n-k)!}{(2n-2k)!2^k n!},$$

(7)中 x^{n-2k} 的系数是

$$(-1)^k \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!} \frac{(2n-2k)!2^k n!}{(2n)!(n-k)!}$$

$$=(-1)^k \frac{(n!)^2(2n-2k)!}{\text{[illegible]}}$$

式提供了较容易的方法，这里列举头几个勒让特多项式如下(图 32)：

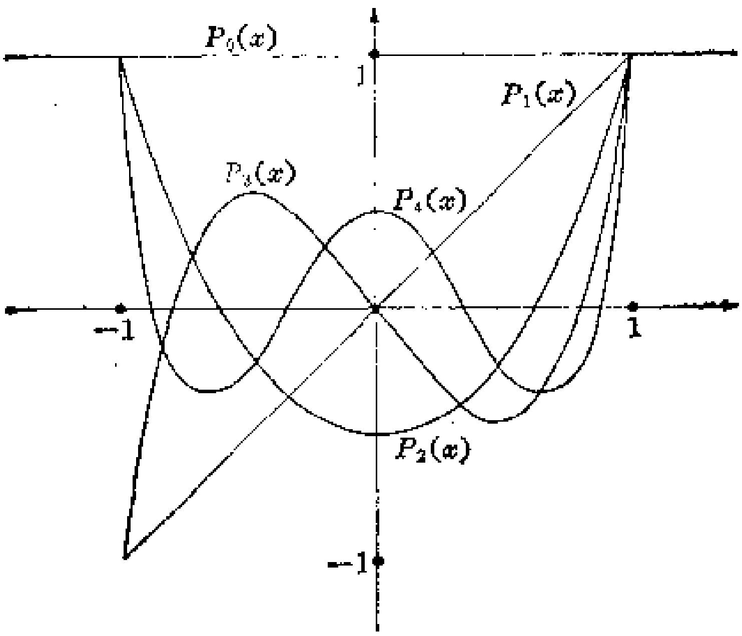


图　32

$$P_0(x)=1,\qquad P_1(x)=x,$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\qquad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x). \tag{10}$$

习题 2 里还提出一个更简便的算法，下节要讲(9)的一个更重要的应用。

习　题

1. 勒让特多项式的生成函数是指下式左边的函数：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=P_0(x)+P_1(x)t+P_2(x)t^2+\cdots+P_n(x)t^n+\cdots.$$

假定这关系式成立，试用它来

a. 验证 $P_n(1)=1$ 及 $P_n(-1)=(-1)^n$；

b. 求证 $P_{2n+1}(0)=0$ 及 $P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}$.

2. 按照生成式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n.$$

a. 将其两边对 t 微分，以证

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}.$$

b. 使(a)中两边 t^n 的系数相等，以得出递推公式

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x).$$

c. 设已知 $P_0(x)=1$ 及 $P_1(x)=x$，试用(b)中的递推公式算出 $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$及 $P_5(x)$.

3. 试按下列步骤推出习题 1 及 2 中的生成式：

a. 用二项级数写出

$$\begin{aligned}[1-t(2x-t)]^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t(2x-t)+\frac{1\cdot 3}{2^2\,2!}t^2(2x-t)^2+\cdots\\+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}t^{n-1}(2x-t)^{n-1}\\+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}t^n(2x-t)^n+\cdots\end{aligned}$$

b. 很明显，t^n 只出现在(a)中的最末项及它前面的一些项中，通过将 $2x-t$ 的各次乘幂展开，试证 t^n的系数总共等于

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}(2x)^n-\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{n-1}{1!}(2x)^{n-2}\\+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-5)}{2^{n-2}(n-2)!}\frac{(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}-\cdots.\end{aligned}$$

c. 试证(b)中的和就是(8)所给出的 $P_n(x)$.

4. 本题是对下列事实的直接验证：若 $P_n(x)$由公式(9)定义，则它满足勒让特方程(1)且具有性质 $P_n(1)=1$. 设有 n 次多项式定义如下：

$$y(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

a. 若 $w=(x^2-1)^n$, 则 $(x^2-1)w'-2nxw=0$. 试将此式微分 $k+1$次，以证

$$\begin{aligned}(x^2-1)w^{(k+2)}+2(k+1)xw^{(k+1)}+(k+1)kw^{(k)}\\-2nxw^{(k+1)}-2(k+1)nw^{(k)}=0,\end{aligned}$$

并推断 $y=w^{(n)}$是方程(1)的一个解.

b. 令 $u=(x-1)^n$ 及 $v=(x+1)^n$，并利用公式

$$y=(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v^{(1)}+\cdots+nu^{(1)}v^{(n-1)}+uv^{(n)}$$

以证 $y(1)=n!2^n$.

33. 勒让特多项式的性质

上一节里我们定义了勒让特多项式序列

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots, P_n(x), \cdots \tag{1}$$

读者也听说过这些多项式从数学物理到逼近论都有一些应用，现在我们来讨论这些应用所依据的基本思想.

正交性 勒让特多项式的最重要性质是

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x) = \begin{cases} 0 & 若\ m\neq n. \\ \dfrac{2}{2n+1} & 若\ m=n. \end{cases} \tag{2}$$

这一事实我们常把它说成：(1)是区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上的正交函数序列. 我们先来证明，然后说明这一性质的重要意义.

设 $f(x)$ 是在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上至少有 n 阶连续导数的任一函数，我们来考察积分

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.$$

用罗德里克公式可把这积分变成

$$I=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx,$$

进行一次分部积分，得到

$$I=\frac{1}{2^n n!}\left[f(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx.$$

方括号里的式子在两个积分限处都等于 0，故

$$I=-\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx;$$

继续进行分部积分，得到

$$I=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx.$$

若 $f(x)=P_m(x)$ 而 $m<n$, 则 $f^{(n)}(x)=0$. 从而有 $I=0$, 这就证明了(2)的第一部分. 为证明第二部分, 设 $f(x)=P_n(x)$. 由于 $P_n^{(n)}(x)=(2n)!/2^n n!$, 故有

$$\begin{aligned} I &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx \\ &= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx. \end{aligned} \tag{3}$$

若用 $x=\sin\theta$ 置换自变量, 并利用公式(通过一次分部积分法可证明)

$$\int \cos^{2n+1}\theta d\theta = \frac{1}{2n+1}\cos^{2n}\theta\sin\theta + \frac{2n}{2n+1}\int\cos^{2n-1}\theta d\theta, \tag{4}$$

则(3)中的定积分变为

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}\theta d\theta &= \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}\theta d\theta \\ &= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta \\ &= \frac{2^n n!}{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}. \end{aligned}$$

于是可知在这情形下 $I=2/(2n+1)$, (2)就完全得到证明.

勒让特级数 如同在附录 A 中所要举例说明的, 势论中有许多问题依赖于一给定函数之能否展开为勒让特多项式级数. 容易看出, 若给定函数本身是个多项式, 这事总能办得到. 例如, 公式 32-(10) 告诉我们

$$1=P_0(x),\ x=P_1(x),\ x^2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}P_2(x)=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x),$$

$$x^3=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}P_3(x)=\frac{3}{5}P_1(x)+\frac{2}{5}P_3(x);$$

从而知任何一个三次多项式 $p(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$ 可写为

$$\begin{aligned} p(x)=b_0P_0(x)+b_1P_1(x)+b_2\left[\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)\right] \\ +b_3\left[\frac{3}{5}P_1(x)+\frac{2}{5}P_3(x)\right] \end{aligned}$$

$$=\left(b_0+\frac{b_2}{3}\right)P_0(x)+\left(b_1+\frac{3b_3}{5}\right)P_1(x)+\frac{2b_2}{3}P_2(x)+\frac{2b_3}{5}P_3(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{3}a_nP_n(x).$$

更一般地说，由于对任何正整数 n $P_n(x)$是个 n 次多项式，故若将这些步骤简单推广，可证 x^n总能表示为 $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)$ 的线性组合，所以任何 k 次多项式总具有下列形式的展开式：

$$p(x)=\sum_{n=0}^{k}a_nP_n(x).$$

从以上所讲(以及出于应用上的需要) 自然会产生能否把一个"任意"函数 $f(x)$展成所谓**勒让特级数**

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x) \tag{5}$$

的问题. 显然，我们需要有一种新方法来计算(5)中的系数，而这种新方法的关键在于公式(2).

如果我们一点不讲究数学严格性，用 $P_m(x)$乘(5)，并逐项从-1积分到 1，则得到

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx;$$

而由于(2)，上式收缩为

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx=\frac{2a_m}{2m+1}.$$

故得(5)中 a_n 的公式如下：

$$a_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx. \tag{6}$$

如果预先知道 $f(x)$具有(5)这种形式的级数展开式，并且这级数在区间$-1\leqslant x\leqslant 1$ 上逐项可积，那就不难证明上面这些运算步骤是合法的. 在 $f(x)$是多项式时这两个条件显然是满足的；但在其他类型的函数时

就不可能知道这一点，因而对于(5)中的系数 a_n 可由(6)给出这个论断是否成立便属可疑. 然而这一套形式运算是非常富于启发性的，而且如果我们提出以下的问题，那可能会引向合法的数学. 这就是：如果用公式(6)定义 a_n 这些数，然后用它们来形成级数(5)，那末什么样的函数 $f(x)$ 能使这些 a_n 存在并使展开式(5)成立呢？读者应当记得我们在第24节中讲到福氏级数时也出现类似的问题。在现在这情形下，我们也有类似的回答，但这里还不宜于详谈①.

形式如(5)的展开式之可能成立，显然与勒让特多项式的正交性质(2)大有关系. 这是在特殊函数论里常碰到的一种普遍现象的具体例子. 这现象是，若定义在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的函数序列 $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\cdots$, $\phi_n(x)$, $\cdots$ 具下列性质：

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx=\begin{cases}0 & 若\ m\neq n,\\ \alpha_n\neq 0 & 若\ m=n,\end{cases} \tag{7}$$

则说 ϕ_n 是这区间上的正交函数. 同以前的情形一样，对于这类函数序列所引起的一个普遍的问题，是一"任意"函数 $f(x)$ 可否用下列展开式来表示的问题：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(x),$$

而形式地运用(7)的结果，提示我们系数 a_n 应为

$$a_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx.$$

---

① 所说这个回答(通常称为勒让特展开定理)是不难理解的，但其证明需要用勒让特函数的许多性质，而我们这里尚未提及. 这定理的内容是：若 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上至多具有有限个跳跃间断点，且若 $f(x-)$ 及 $f(x+)$ 表示 $f(x)$ 在一点 x 的左右极限，则 a_n 存在，且勒让特级数在 $-1<x<1$ 上收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x-)+f(x+)],$$

而在 $x=-1$ 处收敛于 $f(-1+)$，在 $x=1$ 处收敛于 $f(1-)$，特别是，它在每个连续点 x 收敛于 $f(x)$. 参看 N. N. Lebedev《特殊函数及其应用》("Special Functions & Their Applications" pp. 53—58).

在第五章的附录 B 及 D 中所提关于厄尔米特多项式及契比雪夫多项式的正交性(对于适当的权函数)，是这方面的另外一些例子. 这一类问题的成功解决是十九世纪及二十世纪初纯数学上的主要成就之一，它将在本丛书往后出的一卷里加以研究.

最小二乘方逼近 设 $f(x)$ 是定义在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上的一个函数，我们来考察用 $\leqslant n$ 次多项式 $p(x)$ 来尽量逼近（就相差二乘方为最小的意义说）$f(x)$ 的问题. 若认为积分

$$I=\int_{-1}^{1}[f(x)-p(x)]^2\,dx \tag{8}$$

代表 $p(x)$ 偏离 $f(x)$ 的平方和，所说问题便是怎样来适当选取 $p(x)$ 以使这积分取极小值. 研究的结果表明，使积分取极小值的多项式恰好就是勒让特级数(5)的头 $n+1$ 个项之和

$$p(x)=a_0P_0(x)+\cdots+a_nP_n(x),$$

其中诸系数由(6)给出.

为证明此事，利用这一事实，即所有 $\leqslant n$ 次的多项式都可表示成 $b_0P_0(x)+\cdots+b_nP_n(x)$ 这种形式. 于是积分(8)可写为

$$\begin{aligned}
I&=\int_{-1}^{1}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n}b_kP_k(x)\right]^2dx\\
&=\int_{-1}^{1}f(x)^2dx+\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}b_k^2-2\sum_{k=0}^{n}b_k\left[\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)dx\right]\\
&=\int_{-1}^{1}f(x)^2dx+\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}b_k^2-2\sum_{k=0}^{n}b_k\frac{2a_k}{2k+1}\\
&=\int_{-1}^{1}f(x)^2dx+\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}(b_k-a_k)^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}a_k^2.
\end{aligned}$$

因 a_k 这些数是固定的，b_k 是可以任意选取的，故显然可见 I 在取 $b_k=a_k$(对于 $k=0,\cdots,n$)时取极小值. 这个论证里所需的唯一假定是 $f(x)$ 及 $f(x)^2$ 应为可积. 若函数 $f(x)$ 的性态足够好，使它在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上具有一个幂级数展开式，那末大多数学生总以为逼近 $f(x)$ 的"最

佳”多项式必是幂级数的部分和. 然而上述结果证明,若逼近的准则是按最小二乘方计,那末这一猜测是错误的.

习 题

1. 验证公式(4).
2. 勒让特方程也可以写成下列形式:

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y']+n(n+1)y=0,$$

故有

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m']+m(m+1)P_m=0$$

及

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n']+n(n+1)P_n=0.$$

利用这两个方程, 试对不依赖于勒让特多项式特殊形式的公式(2)的第一部分,作出一个证明. (提示: 以 P_n 乘第一个方程, 以 P_m 乘第二个方程, 把结果相减,然后从 -1 积分到 1.)

3. 若把第 32 节习题 1 及 2 中的生成式平方并从 $x=-1$ 积分到 $x=1$, 则由(2)的第一部分可知

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1}P_n(x)^2dx\right)t^{2n}.$$

试证左边的积分等于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n}$$

以证明(2)的第二部分.

4. 求下列函数的勒让特级数的头三项.

a. $f(x)=\begin{cases}0 & 若 -1\leqslant x<0,\\ x & 若\ \ 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$

b. $f(x)=e^x$.

5. 若 $p(x)$ 是 $n\geqslant 1$ 次多项式, 它适合

$$\int_{-1}^{1}x^k p(x)dx=0\quad (k=0,1,\cdots,n-1),$$

试证 $p(x)=cP_n(x)$, 其中 c 为某一常数.

6. 若以 x^n 项系数的倒数 r 乘 $P_n(x)$，则所得多项式 $rP_n(x)$ 第一项系数是 1. 试证这多项式具有以下的极小性质：在首项系数为 1 的所有 n 次多项式中，$rP_n(x)$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上与 0 的偏离为最小(在最小二乘方意义上)。

34. 贝塞耳函数. 嘎马 (gamma) 函数

微分方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0, \tag{1}$$

其中 p 是个非负的常数，叫贝塞耳方程，它的解叫贝塞耳函数. 这些函数最早出现在丹尼尔·伯努利对于悬链振动的研究中 (习题 24-4)，后来又出现在欧拉的圆膜振动理论及贝塞耳的行星运动研究中①. 近代又发现在物理与工程上，关于波的传播、流体运动、特别是在具有圆柱对称性的许多势论和扩散问题中，贝塞耳函数有多方面的应用. 甚至在纯数学的许多有意义的问题中也用到贝塞耳函数. 我们将在附录 B 里讲它的一些应用，但首先必须定义比较重要的一些贝塞耳函数并推出其比较简单的性质②.

函数 $J_p(x)$ 的定义　在研究(1)的解时，我们先指出，以 x^2 除(1)后，y' 及 y 的系数是 $P(x)=\frac{1}{x}$ 及 $Q(x)=(x^2-p^2)/x^2$，故 $xP(x)=1$，$x^2Q(x)=-p^2+x^2$. 于是原点是个正则奇异点，指数方程 29-(5) 是 $m^2-p^2=0$，指数是 $m_1=p$，$m_2=-p$. 由定理 29-A，可知方程(1)具有下列形式的解：

---

① 贝塞耳(F. W. Bessel, 1784—1846)是著名德国天文学家，且为高斯的密友，两人通讯多年. 他是确定恒星距离的第一个人. 他 1838 年用视差法测得天鹅座 61 号星 (61 Cygni)的距离为 11 光年(或地球轨道直径的 360,000 倍). 1844 年他发现那个最亮的天狼星有个伴星，因而它是如今所谓的双星. 天狼星的这个伴星体积和行星一样大但质量相当于恒星，因而它的密度是水的几千倍，成为宇宙中最可注意的对象之一. 它是最早发现的一个死星，在现代恒星演化学说中占有特殊地位.

② 其全部内容在 G. N. Watson 的《贝塞耳函数论》("A Treatise on the Theory of Bessel Functions", 2nd ed., 1944)中有讨论. 我们所要讨论的只不过是科学家钻研近 300 年之久的沧海中的一粟.

$$y=x^p\sum a_nx^n=\sum a_nx^{n+p};\tag{2}$$

其中 $a_0\neq0$, 且幂级数 $\sum a_nx^n$ 对一切 x 收敛. 为求出这个解, 我们写出

$$y'=\sum(n+p)a_nx^{n+p-1}$$

及

$$y''=\sum(n+p-1)(n+p)a_nx^{n+p-2}.$$

这就可以把方程(1)左边各项分别写成

$$x^2y''=\sum(n+p-1)(n+p)a_nx^{n+p},$$

$$xy'=\sum(n+p)a_nx^{n+p},$$

$$x^2y=\sum a_{n-2}x^{n+p},$$

$$-p^2y=\sum-p^2a_nx^{n+p}.$$

若把这些级数相加, 并使 x^{n+p} 的系数等于 0, 则稍加简化后得出 a_n 的递推公式如下:

$$n(2p+n)a_n+a_{n-2}=0\tag{3}$$

或

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(2p+n)}.\tag{4}$$

我们知道 a_0 是非 0 的任意数. 由于 $a_{-1}=0$, 故由(4)知 $a_1=0$; 再反复应用(4), 可知对于每一个奇数下标 n 都有 $a_n=0$. 所以解(2)的非零系数是

$$a_0,\quad a_2=-\frac{a_0}{2(2p+2)},\quad a_4=-\frac{a_2}{4(2p+4)}=\frac{a_0}{2\cdot4(2p+2)(2p+4)},$$

$$a_6=-\frac{a_4}{6(2p+6)}=-\frac{a_0}{2\cdot4\cdot6(2p+2)(2p+4)(2p+6)},\ \cdots,$$

而解本身则是

$$y=a_0x^p\left[1-\frac{x^2}{2^2(p+1)}+\frac{x^4}{2^4 2!(p+1)(p+2)}\right.$$
$$\left.-\frac{x^6}{2^6 3!(p+1)(p+2)(p+3)}+\cdots\right]$$

$$=a_0x^p\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^{2n}n!(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}. \tag{5}$$

p **阶第一类贝塞耳函数** $J_p(x)$的定义是取(5)中的 $a_0=1/2^p p!$，故

$$J_p(x)=\frac{x^p}{2^p p!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^{2n}n!(p+1)\cdots(p+n)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{2n+p}}{n!(p+n)!}. \tag{6}$$

用处最多的贝塞耳函数是 0 阶和 1 阶的，它们是

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots \tag{7}$$

及

$$J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\cdots \tag{8}$$

它们的图形如图 33 所示．这些图形显示出函数 $J_0(x)$及 $J_1(x)$的一些

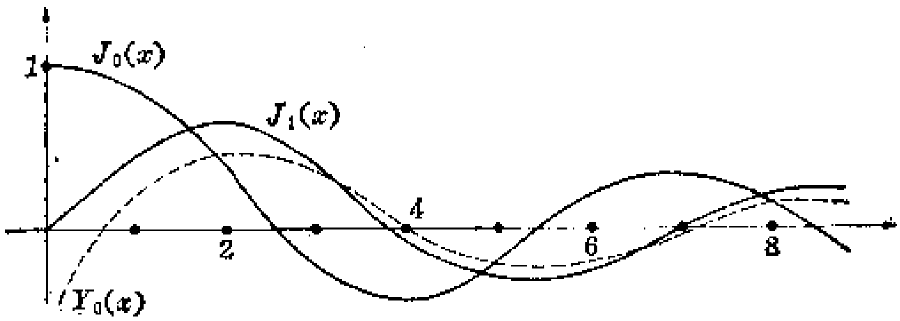


图 33

有趣的特性：每个函数具有衰减的振荡性，产生无穷多正的零点；这些零点交替出现的情况有点象函数$\cos x$ 及$\sin x$ 的样子．这一粗略的类似之处从关系式 $J_0'(x)=-J_1(x)$而进一步加强，读者试加以证明，并

将其应用于习题 1 及 2.

我们希望读者已经注意到这个讨论具有下列缺点：(6) 所定义的 $J_p(x)$ 只有在那个非负实数 p 为一整数时才有意义，因为只有在那种情形下我们才能给分母中的因子 $(p+n)!$ 以确定意义. 现在我们来讨论怎样克服这个困难.

嘎马(*gamma*)函数 我们之所以要旁涉这个问题，是为了要对非负实数 p 不是整数的情形，来给 $p!$ (以及更一般地对 $(p+n)!$, $n=0, 1, 2, \cdots$) 确定一个合理而有用的意义. 为此我们引入嘎马(*gamma*) 函数 $\Gamma(p)$ 的定义如下：

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt, p>0. \tag{9}$$

当 $t\to\infty$ 时因子 $e^{-t}\to 0$ 的速度很快，所以不管 p 是什么值，这个旁义积分在积分上限收敛. 然而在积分下限处 $e^{-t}\to 1$，而当 $p<1$ 时 $t^{p-1}\to\infty$. 故为保证在积分下限处收敛，必须限定 p 为正数.

容易看出

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p); \tag{10}$$

因分部积分后可得

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1)&=\lim_{b\to\infty}\int_0^b t^pe^{-t}dt\\&=\lim_{b\to\infty}\left(-t^pe^{-t}\Big|_0^b+p\int_0^b t^{p-1}e^{-t}dt\right)\\&=p\left(\lim_{b\to\infty}\int_0^b t^{p-1}e^{-t}dt\right)=p\Gamma(p),\end{aligned}$$

这是因为 $b\to\infty$ 时 $b^p/e^b\to 0$. 若利用

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1, \tag{11}$$

则自(10)可得 $\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1$, $\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2\cdot 1$, $\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3\cdot 2\cdot 1$，而一般对于任一整数 $n\geqslant 0$，有

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{12}$$

我们开始讨论嘎马函数时假定 p 是非负的，然后一开头就提出积

分(9)在 $p=0$ 时不存在．然而我们可以不借助于积分(9)而对许多负的 p 值来定义 $\Gamma(p)$，头一步是把(10)写成如下形式：

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}. \tag{13}$$

对定义的这一步扩充在应用上是必要的，它的做法是：若 $-1<p<0$，则 $0<p+1<1$，故(13)式右边有一个值，而(13)式的左边则以右边的值来定义．下一步是，我们注意到：若 $-2<p<-1$，则 $-1<p+1<0$，故仍可用(13)通过上一步已定义的 $\Gamma(p+1)$ 值在区间 $-2<p<-1$ 上来定义 $\Gamma(p)$．这种步骤显然可以无限制地做下去．又从(11)容易看出，按照 p 是从右边或从左边 $\to 0$，

$$\lim_{p\to 0}\Gamma(p)=\lim_{p\to 0}\frac{\Gamma(p+1)}{p}=\pm\infty.$$

函数 $\Gamma(p)$ 在所有负整数附近的性态都相似，所以它的曲线大体上呈图34所示的形状．我们还需要知道

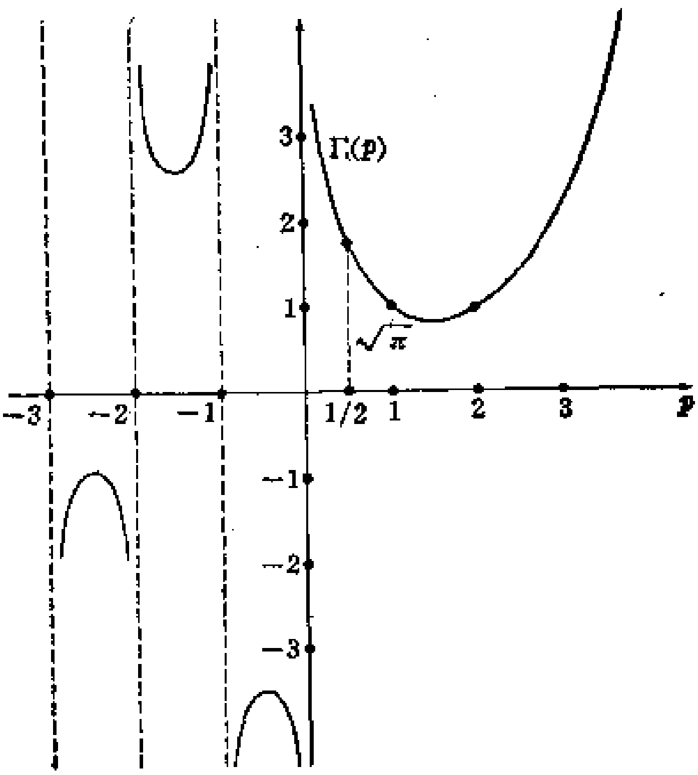


图　34

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{14}$$

这个奇特的事实. 这在图中有所标明,我们留待读者去证明(习题 3). 由于 $\Gamma(p)$ 决不会等于 0, 故若对于 $p=0, -1, -2, \cdots$ 约定 $1/\Gamma(p)=0$, 则可予函数 $1/\Gamma(p)$ 以定义,并且它对一切 p 值的性态正常.

按照这些思想,对于除负整数以外的一切 p 值,可定义 $p!$ 为

$$p!=\Gamma(p+1),$$

而当 p 为非负整数时, 这函数仍按公式(12)具有它通常的意义. 它的倒数 $1/p!=1/\Gamma(p+1)$ 对于所有 p 都有意义, 且当 p 为一负整数时它的值是 0.

嘎马函数本身也是一个很饶趣味的函数, 本丛书以后将有一卷对它的性质和应用作更为充分的讨论. 这里之所以要讲一下, 是为了保证(6)式所定义的函数 $J_p(x)$ 对每一 $p\geqslant 0$ 都有意义. 但其好处还不仅在此,因为既然现在对于每一个 $p+n$ 都能使 $1/(p+n)!$ 具有意义, 故(6)对于所有 p 值都毫无例外地定义了 x 的一个可靠的函数.

贝塞耳方程的通解 目前的情况是, 我们已经得出了(1)的相应于指数 $m_1=p$ 的一个特解 $J_p(x)$. 为求通解, 必须作出第二个线性无关解, 也就是不等于 $J_p(x)$ 的常数倍的解. 任何一个这样的解叫第二类贝塞耳函数. 自然的做法是用另一个指数 $m_2=-p$ 来试一下. 但这样做的时候,我们预计在差 $m_1-m_2=2p$ 等于 0 或正整数时会碰到困难, 也就是当非负常数 p 为一整数或等于奇整数之半时会有困难. 但所预计的困难只有在第一种情况下才是不易对付的.

所以我们先假定 p 不是一个整数. 在这情况下, 我们把上述论证中的 p 换为 $-p$, 且易知整个讨论几乎无需改变. 唯一例外是(3)现在变成了

$$n(-2p+n)a_n+a_{n-2}=0;$$

而若出现 $p=\frac{1}{2}$ 的情况, 则可令 $n=1$ 便知不一定需要取 $a_1=0$. 但因我们所要的只是一个特解, 故肯定可取 $a_1=0$. 同样的问题在 $p=3/2$

及 $n=3$ 等等情形下也会出现；而我们每次可令 $a_1=a_3=\cdots=0$ 来加以解决．其余一切都照以前那样做，于是得出第二个解：

$$J_{-p}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{2n-p}}{n!(-p+n)!}. \tag{15}$$

这个级数的第一项是

$$\frac{1}{(-p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p},$$

故 $J_{-p}(x)$在 $x=0$ 附近是无界的．由于 $J_p(x)$在 $x=0$ 附近有界，所以这两个解是线性无关的，于是(1)的通解是

$$y=c_1J_p(x)+c_2J_{-p}(x),\ p\text{ 为非整数}. \tag{16}$$

当 p 是个整数 $m\geqslant 0$ 时情况就完全不同．这时(15)变为

$$\begin{aligned}J_{-m}(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{2n-m}}{n!(-m+n)!}\\&=\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{2n-m}}{n!(-m+n)!},\end{aligned}$$

这是因为当 $n=0,1,\cdots,m-1$时，$1/(-m+n)!$这些因子都是 0．把求和的变量(叫哑变量或临时变量)n 换成 $n+m$，并在求和步骤中从 $n=0$ 开始作为补偿，得到

$$\begin{aligned}J_{-m}(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{(x/2)^{2(n+m)-m}}{(n+m)!n!}\\&=(-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{2n+m}}{n!(m+n)!}\\&=(-1)^mJ_m(x).\end{aligned}$$

这说明 $J_{-m}(x)$同 $J_m(x)$并非线性无关，因而在这情形下

$$y=c_1J_m(x)+c_2J_{-m}(x)$$

不是(1)的通解，我们还得继续找别的特解．

到这里过程就变得颇为复杂，我们先非常简略地概括说一下．一种可能的做法是用第 16 节所讲的方法，易见那时将得出与 $J_m(x)$线性

无关的第二个解是

$$J_m(x)\int\frac{dx}{xJ_m(x)^2}.$$

然而通常的做法与此稍有不同，而是下面这样的．当 p 不是一个整数时，形如(16)而其中 $c_2\neq0$ 的任何函数，包括 $J_{-p}(x)$ 本身，都是第二类贝塞耳函数．标准第二类贝塞耳函数的含义是

$$Y_p(x)=\frac{J_p(x)\cos p\pi-J_{-p}(x)}{\sin p\pi}. \tag{17}$$

选择这样一个奇特的形式是有理由的，这个我们马上就要讲到．但首先读者应注意到(16)肯定可以写成下列等价的形式：

$$y=c_1J_p(x)+c_2Y_p(x),\ p\text{ 为非整数}, \tag{18}$$

我们仍然面临着 p 为一整数 m 时怎么办的问题，因为在这情形下(17)是无意义的．但详细分析的结果发现下式所定义的函数

$$Y_m(x)=\lim_{p\to m}Y_p(x) \tag{19}$$

存在，并且是个第二类贝塞耳函数；因而可知

$$y=c_1J_p(x)+c_2Y_p(x) \tag{20}$$

在所有情形下都是贝塞耳方程的通解，而不管 p 是否为整数．$Y_0(x)$的图形在图 33 中用虚线标出．这图线说明一个重要的情况，对于每一个 $p\geqslant0$，函数 $Y_p(x)$在原点附近无界．因此，如果我们感兴趣的只是贝塞耳方程的在 $x=0$ 附近有界的解(而在应用问题中情况往往就是这样)，那就必须取(20)中的 $c_2=0$．

现在我们来说明(17)取这种奇特形式的理由．我们说过，第二类贝塞耳函数可用许多方式来定义．(17)及(19)这两种定义之所以特别方便，有两个理由．第一，(17)这种形式使我们比较易于证明极限(19)存在(参看习题 9)．第二，这两个定义意味着，对于大的 x 值，$Y_p(x)$的性态自然而然地同 $J_p(x)$ 的性态配合．为理解这句话的意思，可回顾习题 22-3，在那里我们引入新的因变量 $u(x)=\sqrt{x}\,y(x)$，把贝塞耳方程(1)变为

$$u''+\left(1+\frac{1-4p^2}{4x^2}\right)u=0. \tag{21}$$

当 x 的值很大时，方程(21)非常接近于熟知的微分方程 $u''+u=0$，而它具有线性无关解 $u_1(x)=\cos x$ 及 $u_2(x)=\sin x$. 因此可以料想，对于很大的 x 值，任何贝塞耳函数的性态将类似于两个函数

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\cos x \quad 及 \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\sin x$$

的线性组合. 这种料想因下列事实而增加其份量:

$$J_p(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{p\pi}{2}\right)+\frac{r_1(x)}{x^{3/2}}$$

及

$$Y_p(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{p\pi}{2}\right)+\frac{r_2(x)}{x^{3/2}},$$

其中 $r_1(x)$及 $r_2(x)$在 $x\to\infty$ 时是有界的①.

习　题

1. 利用(7)及(8)，试证

   a. $\frac{d}{dx}J_0(x)=-J_1(x)$;

   b. $\frac{d}{dx}[xJ_1(x)]=xJ_0(x)$.

2. 利用题1及罗尔定理，试证

   a. 在 $J_0(x)$的任何两个正零点之间有 $J_1(x)$的一个零点.

   b. 在 $J_1(x)$的任何两个正零点之间有 $J_0(x)$的一个零点.

3. 按定义(9)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt.$$

   a. 试证，换自变量 $t=s^2$，可得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-s^2}ds.$$

① 参看 Watson《贝塞耳函数论》第七章及 R. Courant and D. Hilbert《数学物理方法》第一卷(pp. 331, 334, 526, Interscience-Wiley, 1953).

b. 由于(a)中的 s 并非真变量，故可写出

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=4\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

试将这二重积分化为极坐标，以证

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\pi,$$

从而有 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

4. 当 p 不是负的整数时，由于 $p!=\Gamma(p+1)$，(14) 告诉我们 $\left(-\frac{1}{2}\right)!=\sqrt{\pi}$. 试计算 $\left(\frac{1}{2}\right)!$ 及 $\left(\frac{3}{2}\right)!$. 更一般地，试就任何非负的整数 n，证明

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)!=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}$$

及

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)!=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$$

5. 当 $p=\frac{1}{2}$ 时，方程(21)表明贝塞耳方程的通解可表示为下列两种等价形式的任何一种：

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}(c_1\cos x+c_2\sin x)$$

及

$$y=c_1J_{\frac{1}{2}}(x)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

因此必然有

$$\sqrt{x}\;J_{\frac{1}{2}}(x)=a\cos x+b\sin x$$

及

$$\sqrt{x}\;J_{-\frac{1}{2}}(x)=c\cos x+d\sin x,$$

其中 a, b, c 及 d 为某些常数. 通过计算这些常数，试证

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad 及 \quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

6. 试直接对 $J_{\frac{1}{2}}(x)$ 及 $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ 的级数展式进行运算，以证题 5 中的两个公式.

7. 许多微分方程实际上是化妆成别的形式的贝塞耳方程，因而它们也可用贝塞耳函数求解. 例如，若将贝塞耳方程写为

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-p^2)w=0,$$

试证，将变量按 $z=ax^b$ 及 $w=yx^c$ 改换（其中 a, b, 及 c 为常数），可把这个方程化为

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(2c+1)x\frac{dy}{dx}+[a^2b^2x^{2b}+(c^2-p^2b^2)]y=0.$$

试用贝塞耳函数表示这个方程的通解.

8. 试用题 7 的结果，证明艾利(Airy)方程 $y''+xy=0$(参看习题 27-5)的通解是

$$y=x^{\frac{1}{2}}\left[c_1J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+c_2J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right].$$

9. 用罗彼塔法则求(19)中的极限，以证

$$Y_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial p}J_p(x)-(-1)^n\frac{\partial}{\partial p}J_{-p}(x)\right]_{p=n}.$$

35. 贝塞耳函数的性质

对于任何实数 p，贝塞耳函数 $J_p(x)$的定义是

$$J_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{2n+p}}{n!\,(p+n)!},\tag{1}$$

这一节里要讲这些函数的一些性质，那是在它们的应用上很有用的.

一些恒等式及函数 $J_{m+\frac{1}{2}}(x)$. 首先考察公式

$$\frac{d}{dx}[x^pJ_p(x)]=x^pJ_{p-1}(x)\tag{2}$$

及

$$\frac{d}{dx}[x^{-p}J_p(x)]=-x^{-p}J_{p+1}(x)\tag{3}$$

为得出(2)，只要用 x^p 乘级数(1)并微分：

$$\frac{d}{dx}[x^pJ_p(x)]=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+2p}}{2^{2n+p}n!\,(n+p)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+2p-1}}{2^{2n+p-1}n!\,(n+p-1)!}$$

$$=x^p\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x/2)^{2n+p-1}}{n!(p-1+n)!}=x^pJ_{p-1}(x).$$

(3)的验证也相似，我们把细节放在底下习题 1 里让读者自己去做．若把(2)及(3)中的求导运算做出来，再以 $x^{\pm p}$ 除所得结果，这些公式就变为

$$J'_p(x)+\frac{p}{x}J_p(x)=J_{p-1}(x) \tag{4}$$

及

$$J'_p(x)-\frac{p}{x}J_p(x)=-J_{p+1}(x). \tag{5}$$

若将(4)及(5)相加并相减，则得

$$2J'_p(x)=J_{p-1}(x)-J_{p+1}(x) \tag{6}$$

及

$$\frac{2p}{x}J_p(x)=J_{p-1}(x)+J_{p+1}(x) \tag{7}$$

有了这些公式，便可把贝塞耳函数及其导数用其它贝塞耳函数来表示．

(7)的一个有趣的应用是从下面的公式开始的：

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad 及 \quad J_{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,$$

这两个公式已在习题 34-5 中作出证明．现从(7)得到

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)$$

及

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\frac{3}{x}J_{\frac{3}{2}}(x)-J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3\sin x}{x^2}-\frac{3\cos x}{x}-\sin x\right).$$

又

$$J_{-\frac{3}{2}}(x)=-\frac{1}{x}J_{-\frac{1}{2}}(x)-J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{\cos x}{x}-\sin x\right)$$

及

$$J_{-\frac{5}{2}}(x)=-\frac{3}{x}J_{-\frac{3}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3\cos x}{x^2}+\frac{3\sin x}{x}-\cos x\right).$$

这类计算显然可以无限制地做下去，因而每一个象 $J_{m+\frac{1}{2}}(x)$(m 是个整数）的贝塞耳函数是初等函数．利乌维勒证明 $J_p(x)$ 中只有这些函数是初等函数①.

公式(7)的另一个应用见附录C的末尾，那里可以看到怎样用它得出$\tan x$ 的兰伯特连分式．这个连分式有很大历史价值，因为它导致 π 不是有理数的第一个证明.

若把微分法公式(2)及(3)写成

$$\int x^p J_{p-1}(x)dx = x^p J_p(x) + c \tag{8}$$

及

$$\int x^{-p} J_{p+1}(x)dx = -x^{-p} J_p(x) + c \tag{9}$$

的形式，那末它们可用来对于一些含贝塞耳函数的简单式子进行积分．例如，当 $p=1$, (8)给出

$$\int x J_0(x)dx = xJ_1(x) + c. \tag{10}$$

对于一些更复杂的积分，如其中的幂指数不能与贝塞耳函数的阶数配合成公式(8)和(9)中那样，通常必须用分部积分法作为辅助工具.

零点与贝塞耳级数．由习题 22-3 可知对于每一个 p 值，函数 $J_p(x)$具有无穷多个正的零点．特别对于 $J_0(x)$ 来说也是这样．这函数的零点我们知道得很准确，许多数学表里都给出它们的值．头五个的近似值是 2.4048, 5.5201, 8.6537, 11.7915 及 14.9309；它们的相继各个差分是 3.1153, 3.1336, 3.1378 及 3.1394．$J_1(x)$ 的相应正的零点是 3.8317, 7.0156, 10.1735, 13.3237 及 16.4706；以及差分 3.1839, 3.1579, 3.1502 及 3.1469．注意这些差分值肯定了习题 23-1 所要证明的事项.

---

① 这项工作的细节可在 Watson 书的第四章中或 J. F. Ritt "Integration in Finite Terms"(1948) 一书中找到．$J_{m+\frac{1}{2}}(x)$这些函数常称为球(坐标)贝塞耳函数，因为它们出现在解球坐标波动方程的问题里.

为什么要这样关心 $J_p(x)$的零点呢？因为在数学分析里常需把所给函数展成贝塞耳函数项级数，而有一类特殊的展开式依赖于 $J_p(x)$ 的零点. 最简单而又最有用的这一类展开式是下面这样的级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_p(\lambda_nx)=a_1J_p(\lambda_1x)+a_2J_p(\lambda_2x)+\cdots, \qquad (11)$$

这里 $f(x)$是定义在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的函数，λ_n 是某个固定贝塞耳函数 $J_p(x)(p\geqslant 0)$的正的零点. 我们取区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 是为了简便，对于定义在 $0\leqslant x\leqslant a$ 上的一个函数来说，只要作一次简单的变量置换，都能使它适合下面所给出的一切公式. 这种展开式在物理问题中的作用，同第 24 节及附录 A 中举例说明的福氏级数和勒让特级数的作用相似，那里所讨论的问题涉及弦振动和球内温度分布. 在附录 B 中，我用实例说明(11)在求解振动圆膜二维波动方程时的用处.

根据我们以往对福氏级数及勒让特级数的经验，可以料想在确定(11)中的系数时将依赖于函数 $J_p(\lambda_nx)$ 的某些积分性质. 这里所需要的事实是

$$\int_0^1 xJ_p(\lambda_mx)J_p(\lambda_nx)\,dx=\begin{cases}0 & 若\ m\neq n,\\ \dfrac{1}{2}J_{p+1}(\lambda_n)^2 & 若\ m=n\end{cases} \qquad (12)$$

用第 33 节中所引入的概念来说，这些公式表明 $\sqrt{x}\,J_p(\lambda_nx)$ 这些函数在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上正交. 这些公式我们将在本节末尾证明，但首先我们来说明它们的用处.

若假定(11)那种形式的展开式是可能的，则用 $xJ_p(\lambda_mx)$ 去乘两边，并形式地逐项从 0 积分到 1，再利用(12)，得出

$$\int_0^1 xf(x)J_p(\lambda_mx)\,dx=\frac{a_m}{2}J_{p+1}(\lambda_m)^2;$$

把 m 换成 n，就得到 a_n 的公式如下：

$$a_n=\frac{2}{J_{p+1}(\lambda_n)^2}\int_0^1 xf(x)J_p(\lambda_nx)\,dx. \qquad (13)$$

系数按(13)算出其系数的级数(11)叫函数 $f(x)$ 的贝塞耳级数(有时叫福里哀-贝塞耳级数). 这里我们仍然不加证明叙述一个颇为深奥的定理,它给出在什么条件下这级数确实收敛,且其和为 $f(x)$. ①

定理 A.（贝塞耳展开定理.） 设函数 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上至多有有限个跳跃间断点. 如果 $0<x<1$, 则贝塞耳级数 (11) 在 x 为 $f(x)$ 的连续点时收敛于 $f(x)$, 而在 x 为 $f(x)$ 的间断点时收敛于 $\frac{1}{2}[f(x-)+f(x+)]$.

我们自然要问区间端点处的情形如何. 在 $x=1$ 处,不管函数的性质如何,级数总收敛于 0, 因为每个 $J_p(\lambda_n)$ 是 0. 若 $p>0$ 这级数在 $x=0$ 也收敛于 0,而若 $p=0$ 则收敛于 $f(0+)$.

作为一个例子, 我们来算函数 $f(x)=1$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上以函数 $J_0(\lambda_n x)$为项的贝塞耳级数,这里的 λ_n 应理解为 $J_0(x)$的正的零点. 这时的(13)是

$$a_n=\frac{2}{J_1(\lambda_n)^2}\int_0^1 xJ_0(\lambda_n x)dx,$$

由(10)知

$$\int_0^1 xJ_0(\lambda_n x)\,dx=\left[\frac{1}{\lambda_n}xJ_1(\lambda_n x)\right]_0^1=\frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n}$$

故

$$a_n=\frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}.$$

由此得所要的贝塞耳级数是

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}J_0(\lambda_n x)\quad(0\leqslant x<1).$$

正交性的证明. 为证明(12),先从 $y=J_p(x)$是

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)y=0$$

① 其证明参看 Watson 一书第 18 章.

的解这一事实出发. 若 a 及 b 是不同的正的常数, 则 $u(x)=J_p(ax)$ 及 $v(x)=J_p(bx)$ 满足方程

$$u''+\frac{1}{x}u'+\left(a^2-\frac{p^2}{x^2}\right)u=0 \tag{14}$$

及

$$v''+\frac{1}{x}v'+\left(b^2-\frac{p^2}{x^2}\right)v=0. \tag{15}$$

以 v 及 u 分别乘二式并把所得结果相减, 得到

$$\frac{d}{dx}(u'v-v'u)+\frac{1}{x}(u'v-v'u)=(b^2-a^2)uv;$$

乘以 x 后, 上式变为

$$\frac{d}{dx}[x(u'v-v'u)]=(b^2-a^2)\,xuv. \tag{16}$$

将(16)从 $x=0$ 积分到 $x=1$, 得到

$$(b^2-a^2)\int_0^1 xuvdx=[x(u'v-v'u)]_0^1.$$

方括号里的式子显然在 $x=0$ 处等于 0, 而在区间的另一头则有 $u(1)=J_p(a)$ 及 $v(1)=J_p(b)$. 故若 a 及 b 是 $J_p(x)$ 的不同的正的零点 λ_m 及 λ_n, 左边的积分就等于 0; 就是说, 我们有

$$\int_0^1 xJ_p(\lambda_m x)J_p(\lambda_n x)dx=0, \tag{17}$$

这是(12)的前半部分.

最后一项工作是计算 (17) 中的积分在 $m=n$ 时的值. 若以 $2x^2u'$ 乘(14), 它就变为

$$2x^2u'u''+2xu'^2+2a^2x^2uu'-2p^2uu'=0,$$

即

$$\frac{d}{dx}(x^2u'^2)+\frac{d}{dx}(a^2x^2u^2)-2a^2xu^2-\frac{d}{dx}(p^2u^2)=0,$$

于是从 $x=0$ 积分到 $x=1$, 得到

$$2a^2\int_0^1 xu^2\,dx=[x^2u'^2+(a^2x^2-p^2)u^2]_0^1 \tag{18}$$

当 $x=0$ 时，方括号里的式子等于 0；又因 $u'(1)=aJ'_p(a)$，故(18)给出

$$\int_0^1 xJ_p(ax)^2dx=\frac{1}{2}J'_p(a)^2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{p^2}{a^2}\right)J_p(a)^2.$$

若令 $a=\lambda_n$，则得

$$\int_0^1 xJ_p(\lambda_n x)^2dx=\frac{1}{2}J'_p(\lambda_n)^2=\frac{1}{2}J_{p+1}(\lambda_n)^2,$$

上式最后一步中应用了(5)，这就完成了(12)的证明。

习 题

1. 试验证公式(3)。
2. 试证 $J_p(x)$ 及 $J_{p+1}(x)$ 的正的零点彼此交错出现，即在每个函数的每两个相邻的正的零点之间，恰好有另一函数的一个零点。
3. 试用 $J_0(x)$ 及 $J_1(x)$ 表示 $J_2(x)$，$J_3(x)$ 及 $J_4(x)$。
4. 若 $f(x)$ 定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2} & x=\dfrac{1}{2},\\ 0 & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$$

试证

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_n/2)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)^2}J_0(\lambda_n x),$$

其中 λ_n 是 $J_0(x)$ 的正的零点。

5. 若在区间 $0\leqslant x<1$ 上定义 $f(x)=x^p$，试证它的 $J_p(\lambda_n x)$ 函数项贝塞耳级数(其中 λ_n 是 $J_p(x)$ 的正的零点)是

$$x^p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n)}J_p(\lambda_n x).$$

6. 用题 5 中的记号，试通过形式计算证明：若函数 $g(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的性态是足够好的，则

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^{p+1}g(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n)}\int_0^1 xg(x)J_p(\lambda_n x)dx.$$

取 $g(x)=x^p$ 及 x^{p+2}，试由此推出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}=\frac{1}{4(p+1)} \quad 及 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^4}=\frac{1}{16(p+1)^2(p+2)}.$$

7. $\sin x$ 的正的零点是 $\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$. 利用题 6 的结果(以及习题 34-5)来证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

8. 试证，若按

$$By=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

置换因变量，可将特殊黎卡提(Riccati)方程

$$\frac{dy}{dx}+By^2=Cx^m$$

化为

$$\frac{d^2u}{dx^2}-BCx^mu=0.$$

若 $m\neq-2$，试应用习题 34-7 证明这方程可用初等函数表示它的解，当且仅当 $m=-4k/(2k+1)$，而 k 为某一整数. (若 $m=-2$，则作置换 $y=v/x$ 后便把黎卡提方程化为可分离变量的方程，它的解是初等函数.)

9. 试证

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

的通解可写成

$$y=x\frac{J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)+cJ_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{cJ_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)-J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}.$$

附录 A. 勒让特多项式与势论

若在点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 处分别有质量为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的质点，它们按平方反比例引力律产生引力，那末这些质点在任一点 P 处所产生

的位势（即将单位质量从 P 移到无穷远处反抗这些质点的引力所需的功）是

$$U=\frac{Gm_1}{PP_1}+\frac{Gm_2}{PP_2}+\cdots+\frac{Gm_n}{PP_n},\tag{1}$$

这里 G 是引力常数①. 若点 $P, P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的直角坐标是 (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $\cdots$, (x_n, y_n, z_n), 从而有

$$PP_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

以及其它距离的类似式子，则容易通过求偏导数验证这位势 U 满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0\tag{2}$$

这个偏微分方程中并不含多质点的特殊质量，也不含它们所在位置的坐标，所以它能为任何离散或连续分布质点在真空中所产生的位势所满足. 这方程常写为

$$\nabla^2 U=0,\tag{3}$$

这里的记号 ∇^2(读如"del 平方"，或"倒三角平方") 只不过是代表微分算子

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

的一种简明写法. 函数 U 叫引力位势. 若所讨论的是电荷为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的带电质点, 则它们的静电位势同样具有(1)的形式, 但其中的一些 m 换成一些 q, 而 G 换成库仑常数, 因而它也满足拉普拉斯方程. 这个方程的应用范围是如此之广，以致对它的研究自成其为分析中的一个分支, 叫位势论. 与此有关的方程

$$a^2\nabla^2 U=\frac{\partial U}{\partial t}\tag{4}$$

叫热(传导)方程, 它出现在热传导问题中, 这里 U 既是时间 t 的函数又是空间坐标的函数. 波动方程

① 参看方程 21-(17).

$$a^2\nabla^2U=\frac{\partial^2U}{\partial t^2} \tag{5}$$

是跟振动现象有关系的.

我们简单讲几句话，来说明这些方程的物理意义. 方程(5)只不过是我们早已充分讨论过的一维波动方程 24-(8) 在三维情形下的翻版。至于拉普拉斯方程(3)，则可以看出它对于函数U所规定的事，类似于一维方程$\frac{d^2y}{dx^2}=0$对x的一元函数$y(x)$所规定的事. 但后一方程表明$y(x)$具有线性形式$y=mx+b$；而对于每个这样的函数来说，它们在一个区间中点的值等于在端点处值的平均数. 由(1)显然可见，拉普拉斯方程的解未必是x, y，及z的线性函数，并且它们事实上可能是很复杂的函数. 然而，我们可以证明(这是高斯发现的)，(3)的任何一个解都有这样独特性质：它在球心处的值等于它在球面上之值的平均数. 更一般地，函数∇^2U可大致看成是U在一小球面上的平均值与它在球心处的准确值之差. 例如，若U表示立体内一任意点P处的温度，而在某点P_0处的∇^2U是正数，则U在P_0处的值一般小于它在附近点处的值. 因此可料想热会流向P_0处，使那里的温度增高；而由于温度U是在增高的，故$\partial U/\partial t$在P_0是正数. 而这实质上就是热传导方程(4)所告诉我们的：$\partial U/\partial t$与∇^2U正比且正负一样. 若在整个物体内温度U达到稳恒状态，从而在所有点处$\partial U/\partial t=0$，则$\nabla^2U=0$，我们又回到拉普拉斯方程的情形

我们有时要用到柱坐标(r, θ, z)和球坐标(P, θ, ϕ)中∇^2U的式子. 这些坐标与直角坐标(见图35)之间的关系如下：

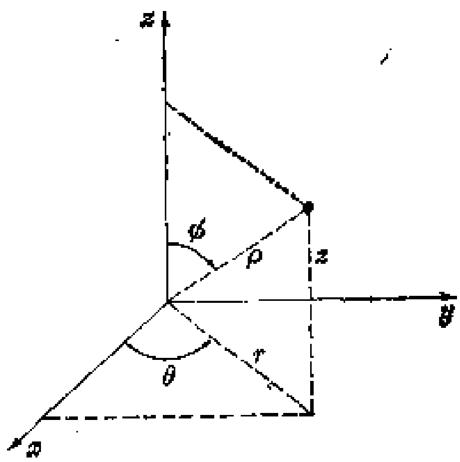


图 35

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z.$$

及

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta,\quad y = \rho\sin\phi\sin\theta,\quad z = \rho\cos\phi.$$

通过费时然而简单的运算，可证明在柱坐标的情形下

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \tag{6}$$

而在球坐标的情形下

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial U}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}. \tag{7}$$

每个学数学的学生一生中应该做一次这种必要的运算，但也许做一次就够啦！

球内稳恒温度状态．讲这个例子的目的，是想以尽可能简单的方式，来说明勒让特多项式在解数学物理中某些边值问题时的作用①．

设球坐标系中有一半径为 1 的球，球心在原点处．设球面保持一特定温度 $f(\phi)$，并且为了简便起见，假定这温度不依赖于 θ．直到热的流动使球内达到稳恒温度 $T(\rho,\phi)$．我们的问题是要求出温度函数的显式．

稳恒温度 T 满足球坐标拉普拉斯方程；而由于 T 不依赖于 θ，故可将(7)写为

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial T}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) = 0. \tag{8}$$

为求(8)在所给边界条件

$$J(1,\phi) = f(\phi) \tag{9}$$

下的解，我们用第 24 节中的分离变量法；这就是求(8)的形式为

$$T(\rho,\phi) = u(\rho)v(\phi)$$

的解．把这代入(8)并分离变量后，得到

$$\frac{1}{u}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{du}{d\rho}\right) = -\frac{1}{v\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{dv}{d\phi}\right). \tag{10}$$

① 在 Lebedev《特殊函数论》第八章中讨论了许多更复杂的问题．

这方法的关键是下列事实：因(10)式左边是只含 ρ 的函数，而右边是只含 ϕ 的函数，所以每一边必为常数．若用 λ 表示这一常数(叫**分离常数**)，(10)就分成两个常微分方程

$$\rho^2\frac{d^2u}{d\rho^2}+2\rho\frac{du}{d\rho}-\lambda u=0 \tag{11}$$

及

$$\frac{1}{\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{dv}{d\phi}\right)+\lambda v=0. \tag{12}$$

方程(11)是欧拉方程，其 $p=2, q=-\lambda$，故其指数方程为

$$m(m-1)+2m-\lambda=0 \quad 或 \quad m^2+m-\lambda=0.$$

于是指数是 $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{1+4\lambda})$，得(11)的通解为

$$u=c_1\rho^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}}}+c_2\rho^{-\frac{1}{2}-\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}}} \tag{13}$$

或

$$u=c_3\rho^{-\frac{1}{2}}+c_4\rho^{-\frac{1}{2}}\log\rho.$$

为保证 u 是单值的并在 $\rho=0$ 附近有界，我们完全抛弃第二种可能的形式，而在(13)中取 $c_2=0$ 及 $-\frac{1}{2}+\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}}=n$，其中 n 为非负的整数．于是 $\lambda=n(n+1)$，故(13)化为

$$u=c_1\rho^n, \tag{14}$$

而(12)变成

$$\frac{d^2v}{d\phi^2}+\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\frac{dv}{d\phi}+n(n+1)v=0.$$

若把自变量从 ϕ 变换为 $x=\cos\phi$，这个方程就变为

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2}-2x\frac{dv}{dx}+n(n+1)v=0, \tag{15}$$

这恰好就是勒让特方程．根据问题的物理条件，函数 v 必在 $0\leqslant\phi\leqslant\pi$ 或者等价地在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上有界；而从第 32 节，我们知道只有勒让特多项式 $P_n(x)$ 的常数倍才是(15)的具有这种性质的解．若把这个结果

同(14)结合,便知对于每个 $n=0,1,2,\cdots$,可得(8)的下列形式的特解

$$a_n\rho^n P_n(\cos\phi), \tag{16}$$

这里 a_n 是些任意常数. 我们不可能指望个别地用这些解使边界条件(9)得到满足. 然而由于拉普拉斯方程是线性的,所以它的解的和式仍旧是它的解,因而我们自然会想到把特解(16)加在一起形成无穷级数,以使 $T(\rho,\phi)$ 能表达成这种形式

$$T(\rho,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\rho^n P_n(\cos\phi). \tag{17}$$

现在边界条件(9)要求

$$f(\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n P_n(\cos\phi),$$

或者其等价形式

$$f(\cos^{-1}x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n P_n(x). \tag{18}$$

我们从第 33 节知道,若函数 $f(\cos^{-1}x)$ 的性态足够好,它就可展成(18)形式的勒让特级数,其中的系数 a_n 由下式给出

$$a_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}f(\cos^{-1}x)P_n(x)dx. \tag{19}$$

若以这些 a_n 作为系数,(17)就是我们这个问题的解.

我们是通过相当多的形式运算步骤得出解(17)的, 所以应该指出这里牵涉到纯数学上的困难问题, 而我们根本没有提到. 对于一个物理学家来说,物体表面温度规定了之后,其内部任一点处总会达到一个确定而唯一的稳恒温度, 这似乎是很显然的事, 但数学家从痛苦的经验深知表面上显然的事往往不正确①. 位势理论中的所谓狄利克雷问

① 在 O. D. Kellogg 的《位势理论基础》(“Foundations of Potential Theory”, p. 285, 1929)中有一些相当简单的例子,可说明物理学家的上述想法不正确. 善于提出格言的爱因斯坦曾说:“最难能可贵的思想品质是怀疑显然事物的能力.”

题，要求严格证明在整个域上存在一个位势函数，使它在域的边界上取给定的值．二十世纪初德国大数学家希尔柏脱对于非常一般然而有明确定义的边界与边值函数解决了这个问题．

静电偶极子位势． 习题 32-1，32-2 及 32-3 中讨论了勒让特多项式的生成关系式

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n. \tag{20}$$

作为直接说明其用处的一个物理例子，我们用它来求两个异性而带等电量 q 的点电荷所产生的位势．若把这两个点电荷放在极坐标系里(图36)，则在合适的度量单位下，P 处的位势是

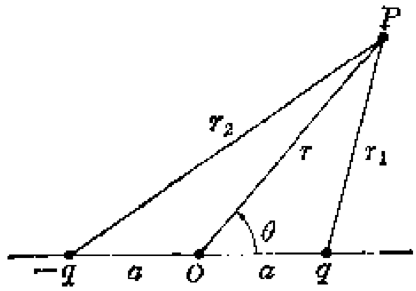


图 36

$$U=\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_2}, \tag{21}$$

其中，根据余弦定理，

$$r_1=\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta} \quad 及 \quad r_2=\sqrt{r^2+a^2+2ar\cos\theta}.$$

当 $r>a$ 时，可用(20)写出

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2(a/r)\cos\theta+(a/r)^2}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n.$$

同样，

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2(a/r)\cos\theta+(a/r)^2}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n.$$

现在可把公式(21)写成

$$U=\frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos\theta)-P_n(-\cos\theta)\right]\left(\frac{a}{r}\right)^n. \tag{22}$$

我们知道，n 次勒让特多项式随 n 之为奇偶而为纯奇偶次多项式．因

此根据 n 之为奇偶，方括号里的式子将分别等于 $2P_n(\cos\theta)$ 或 0，于是(22)就变为

$$U=\frac{2q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_{2n+1}(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}$$

$$=\frac{2q}{r}\left[P_1(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)-P_3(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^3+\cdots\right]. \qquad (23)$$

若假定在 r 与 a 相比很大时可略去第一项之后的各项，并记住

$$P_1(x)=x,$$

则可从(23)得出

$$U=2aq\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right).$$

这就是物理学家所用的偶极子位势的近似公式。

附录 B. 贝塞耳函数与振动膜

贝塞耳函数的最简单物理应用之一，是欧拉关于圆膜振动的理论。这里所谓膜是均匀绷紧在 xy 平面给定闭曲线内的匀质柔性薄片。若把膜稍离其平衡位置然后松开，则因变形而产生的回复力将使膜产生振动。我们的问题是要分析这个振动。

运动方程. 讨论的方法同第24节关于振动弦的情形类似；这就是，我们要作出一些使问题简化的假定，以便写出一个微分方程，并希望这个方程能相当准确地描述这一运动。这些简化假定可以简单概括为一句话：我们只考虑自由振动膜的微小振荡。随着以后的讨论，我们可以看出这些假定的各种用法。

首先假定振动是如此之小，使膜的每一点只沿 z 方向有运动，而它在 t 时的位移由某一函数 $z=z(x,y,t)$ 给出。我们来考察一小块膜，它是由 xy 平面上过点 (x,y)，$(x+\Delta x,y)$，$(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 及 $(x,y+\Delta y)$ 的竖直平面所割出的(图 37)。若单位面积膜的质量是 m，那末这小块膜的质量是 $m\Delta x\Delta y$，于是由牛顿运动第二定律，知在 z 方向上作用于

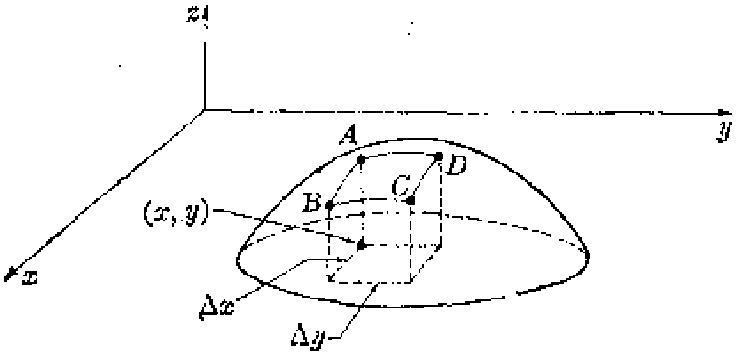


图 37

这块膜的力是

$$F = m\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{1}$$

当膜处于平衡位置时，若说它的张力等于常数 T，那表示如下的物理意义：沿着长度为 Δs 的任一线段，其一侧的膜向另一侧施加一个大小为 $T\Delta s$ 的力，其方向则与线段相垂直．在这种平衡的情形下，小块膜对边上所受的力平行于 xy 平面且互相抵消。当膜身弯曲，如图 37 所示那个运动霎那间的情形，我们假定形变很小，使膜上张力仍是 T，但它的作用方向平行于膜的切面，因而它有一个相当大小的垂直方向分量．由于这块膜有曲率，因而产生对边上的这些垂直分量，引起产生运动的恢复力．

我们在分析这些力的时候，假定记为 $ABCD$ 的这块膜只是稍有倾斜．这就使我们对于某些小的角能用正切来代替正弦，情况如下．沿 DC 及 AB 边上的力垂直于 x 轴且几乎平行于 y 轴，它在 z 方向的分量很小，约等于

$$T\Delta x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+\Delta y} \quad 及 \quad -T\Delta x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y,$$

故其和为

$$T\Delta x\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+\Delta y}-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y\right].$$

这些偏导数的下标指明它们在点 $(x, y+\Delta y)$ 及 (x, y) 处的值．对 BC 及 AD 边同样处理，便得到 z 方向的总力（忽略所有其它外力）约等于

$$F=T\Delta y\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x}\right]+T\Delta x\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+\Delta y}-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y}\right],$$

故(1)可写为

$$T\frac{(\partial z/\partial x)_{x+\Delta x}-(\partial z/\partial x)_{x}}{\Delta x}+T\frac{(\partial z/\partial y)_{y+\Delta y}-(\partial z/\partial y)_{y}}{\Delta y}$$

$$=m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

若设 $a^2=T/m$，并令 $\Delta x\to 0$ 及 $\Delta y\to 0$，上式变为

$$a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},\tag{2}$$

这就是**二维波动方程**.

读者可能对导出方程(2)的推理过程颇感怀疑．如果这样，那是不足为奇的，因为象他那样表示怀疑的人很多；因为对于描述一给定物理系统的微分方程，什么样的推导过程才能令人满意，这从来不是一个容易解决的问题，而在波动方程的情形下特别难以解决．要把所涉及的极限步骤加以严格化是毫无好处的，因为归根到底膜是由原子组成的，它根本不是连续体．所以最合理的态度也许就是接受上述一切，作为得出波动方程这个数学模型的合情论证．然后我们可以用这个方程，作为描述“理想膜”的理性力学中的一个公理，而这个方程的数学性态则也许能够也许不能够符合具体膜的实际性态①.

圆膜. 现在我们专门来讲圆膜的情形，这时我们自然要用极坐标并取圆心为原点．从附录A的公式(6)可知这时波动方程(2)的形式是

$$a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},\tag{3}$$

这里 $z=z(r,\ \theta,\ t)$ 是极坐标与时间的函数．为方便起见，假定膜半径为 1，因而它的平衡平面是绷紧在圆 $r=1$ 上的．于是我们的边界条件

① 关于“什么是合理力学”这个问题，请读者参考 C. Truesdell《力学史文集》(“Essays in the History of Mechanics”)中具有真知灼见的话，pp. 334—340, Springer, New York, 1968.

是

$$z(1,\theta,t)=0. \tag{4}$$

我们的问题是求(3) 在这个边界条件及其后将另行规定的某些初始条件下的解.

应用标准的分离变量法时，我们先求下列形式的特解

$$z(r,\theta,t)=u(r)v(\theta)w(t). \tag{5}$$

将(5)代入(3)并整理所得结果后，得到

$$\frac{u''(r)}{u(r)}+\frac{1}{r}\frac{u'(r)}{u(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{v''(\theta)}{v(\theta)}=\frac{1}{a^2}\frac{w''(t)}{w(t)}. \tag{6}$$

由于(6)式左边是只含 r 及 θ 的函数，而右边是只含 t 的函数，所以两边必须等于一个常数. 要使膜振动， $w(t)$必须是周期函数；而(6)的右边说明如要$w(t)$是周期函数，那个分离变量的常数必须是个负数. 因此我们使(6)的两边等于$-\lambda^2$ $(\lambda>0)$，而得以下两式:

$$w''(t)+\lambda^2a^2w(t)=0 \tag{7}$$

及

$$\frac{u''(r)}{u(r)}+\frac{1}{r}\frac{u'(r)}{u(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{v''(\theta)}{v(\theta)}=-\lambda^2. \tag{8}$$

(7)的通解显然是

$$w(t)=c_1\cos\lambda at+c_2\sin\lambda at, \tag{9}$$

(8)可改写为

$$r^2\frac{u''(r)}{u(r)}+r\frac{u'(r)}{u(r)}+\lambda^2r^2=-\frac{v''(\theta)}{v(\theta)} \tag{10}$$

在(10)中，左边是 r 的函数而右边是 θ 的函数，因此两边又必须等于一个常数. 但我们知道，平面上一点的极角数值可以相差2π的整数倍；而根据问题的性质，任一点处的 v 值应与描述该点的 θ 值无关. 这就要求 v 是个常数或者是个周期为2π的周期函数. 考察(10)的右边，我们看出，若要满足这些条件，就得把分离常数写成 n^2 的形式，其中 $n=0,1,2,\cdots$，于是(10)就分成

$$v''(\theta)+n^2v(\theta)=0 \tag{11}$$

及

$$r^2u''(r)+ru'(r)+(\lambda^2r^2-n^2)u(r)=0. \tag{12}$$

由于 v 必为一个常数或周期等于 2π 的一个周期函数，故由(11)可知，对于每个 n，有

$$v(\theta)=d_1\cos n\theta+d_2\sin n\theta, \tag{13}$$

虽然(13)在 $n=0$ 时并非(11)的通解．其次，从习题 34-7 显然可以看出，(12)是形式稍加改变的 n 阶贝塞耳函数，它具有一个有界的解 $J_n(\lambda r)$以及一个线性无关的无界的解 $Y_n(\lambda r)$．由于 $u(r)$在 $r=0$ 附近必然有界，故得抛弃第二个解，而写出

$$u(r)=kJ_n(\lambda r). \tag{14}$$

现在可取 $u(1)=0$ 或

$$J_n(\lambda)=0 \tag{15}$$

而使边界条件(4)得以满足．因此 λ 所能取的值只许是函数 $J_n(x)$ 的正的零点，而我们从第 35 节知道 $J_n(x)$具有无穷多个这样的零点．于是我们可以得出结论：根据这一分析求得的特解(5)，是双重无穷的一批函数

$$J_n(\lambda r)(d_1\cos n\theta+d_2\sin n\theta)(c_1\cos\lambda at+c_2\sin\lambda at) \tag{16}$$

的常数倍，其中 $n=0,1,2,\cdots$，而对于每一 n，相应的 λ 是(15)的正根．

特殊初始条件． 以上所讲，目的是为说明物理问题里的整数阶贝塞耳函数是怎样出来的．它也说明了这些函数的正的零点的重要性在那里．为求简化，我们把往后的讨论限于下列特殊情形：膜起初被拉成为 $z=f(r)$这一不依赖于变量 θ 的形状，然后在 $t=0$ 时从静止状态松开．这就是，我们给它外加初始条件

$$z(r,\theta,0)=f(r) \tag{17}$$

及

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{18}$$

现在的问题是要确定膜在其后任一时刻 $t>0$ 的形状 $z(r,\theta,t)$．

我们的做法是使已求得的特解适合所给初始条件．第一，说到初

始形状不依赖于 θ 的那部分初始条件(17)，它意味着 $v(\theta)$是个常数，故由(13)可知 $n=0$. 若记 $J_0(x)$的正的零点为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$，那末刚才指出的事实就使(16)那一批函数减少到

$$J_0(\lambda_n r)(c_1\cos\lambda_n at + c_2\sin\lambda_n at), \qquad n=1, 2, \cdots$$

其次，由(18)可知 $c_2=0$，这就使我们的特解只剩下

$$J_0(\lambda_n r)\cos\lambda_n at, \qquad n=1, 2, \cdots$$

这些函数的常数倍. 到这里为止，我们还没有利用这一事实：(3) 的一些解之和仍是(3)的解. 因此，我们现在从形式上所能得到的最通用的解是无穷级数

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}a_n J_0(\lambda_n r)\cos\lambda_n at. \tag{19}$$

最后一步工作是取(19)中的 $t=0$ 并使其结果等于 $f(r)$，以求满足条件(17)：

$$f(r)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n J_0(\lambda_n r).$$

根据第 35 节的贝塞耳展开定理，当 $f(r)$的性态足够好，且若系数由

$$a_n=\frac{2}{J_1(\lambda_n)^2}\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_n r)dr$$

确定，则可保证 $f(r)$的级数展式成立. 有了这些系数 a_n，(19) 便是(3)的这样一个形式解，它能满足所给边界条件与初始条件，而这就结束了我们所讨论的问题①.

附录 C. 贝塞耳函数的一些其他性质

在第 34 及第 35 节中，限于篇幅，我们没有讲贝塞耳函数的一些理应提及的重要性质，因此就把它们放在这个附录里. 遗憾的是，要使我们的做法显得完全合理，还需要有分析中一些更高深的定理，但这仍无损于这些结果本身的正确性.

① 贝塞耳函数的许多其他应用还可在 Lebedev 一书第六章中找到. 另外可参看 A. Gray and G. B. Mathews "A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics", 1952.

生成函数. 整数阶的贝塞耳函数之间，有下列事实作为连系：

$$e^{(x/2)(t-1/t)}=J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(x)[t^n+(-1)^n t^{-n}]. \tag{1}$$

由于 $J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$，故上式常写为

$$e^{(x/2)(t-1/t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n. \tag{2}$$

为得出(1)，我们形式地把下列两个级数相乘：

$$e^{xt/2}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{x^j}{2^j}t^j,\quad e^{-xt^{-1}/2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{x^k}{2^k}t^{-k}. \tag{3}$$

相乘的结果是一个所谓二重级数，其各项是第一级数中的一项与第二级数中的一项相乘的一切可能有的乘积. 由于(3)中每个级数都绝对收敛，故可断言这个二重级数收敛于它的合适的和，而不管其各项的排列次序如何. 对于每一固定的整数 $n\geqslant 0$，在恰好当 $j=n+k$ 时，可得出二重级数中含 t^n 的一个项；而当我们把所有可能的 k 值都算进去之后，t^n 的总系数是

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}\frac{x^{n+k}}{2^{n+k}}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{x^k}{2^k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$
$$=J_n(x).$$

同样，在恰好当 $k=n+j$ 时可出现含 $t^{-n}(n\geqslant 1)$ 的一项，故 t^{-n} 的总系数是

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{x^j}{2^j}\frac{(-1)^{n+j}}{(n+j)!}\frac{x^{n+j}}{2^{n+j}}=(-1)^n\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(x/2)^{2j+n}}{j!(n+j)!}$$
$$=(-1)^n J_n(x),$$

对于(1)的证明就此完毕.

从(2) 可得出一个简单的结论**加法公式**

$$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{n-k}(x)J_k(y). \tag{4}$$

为证明此式，首先注意

$$e^{(x/2)(t-1/t)}e^{(y/2)(t-1/t)}=e^{[(x+y)/2](t-1/t)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x+y)t^n.$$

但左边两个指数函数的乘积又等于

$$\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty}J_j(x)t^j\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(y)t^k\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{n-k}(x)J_k(y)\right]t^n,$$

于是若使以上两式中 t^n 的系数彼此相等，便立即可以得出(4). 当 $n=0$ 时，(4)可写为

$$J_0(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{-k}(x)J_k(y)$$

$$=J_0(x)J_0(y)+\sum_{k=1}^{\infty}J_{-k}(x)J_k(y)+\sum_{k=1}^{\infty}J_k(x)J_{-k}(y)$$

$$=J_0(x)J_0(y)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k[J_k(x)J_k(y)+J_k(x)J_k(y)]$$

$$=J_0(x)J_0(y)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2J_k(x)J_k(y),$$

或

$$J_0(x+y)=J_0(x)J_0(y)-2J_1(x)J_1(y)+2J_2(x)J_2(y)-\cdots. \tag{5}$$

若将 y 换成 $-x$，并利用 n 之奇偶决定 $J_n(x)$ 之为纯奇数次或纯偶数次幂这一事实，则自(5)可得出一个很妙的恒等式

$$1=J_0(x)^2+2J_1(x)^2+2J_2(x)^2+\cdots, \tag{6}$$

这说明，$|J_0(x)|\leqslant 1$，而对于 $n=1,2,\cdots$，$|J_n(x)|\leqslant 1/\sqrt{2}$.

贝塞耳积分公式. 当 $t=e^{i\theta}$ 时，(2)左边的指数变为

$$x\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}=ix\sin\theta,$$

于是(2)本身就变为

$$e^{ix\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}. \tag{7}$$

由于 $e^{ix\sin\theta}=\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)$以及 $e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$，故若使(7)两边的实部与虚部各自相等，则得

$$\cos(x\sin\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\cos n\theta \tag{8}$$

及

$$\sin(x\sin\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\sin n\theta. \tag{9}$$

现若利用 $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$，$\cos(-n\theta)=\cos n\theta$，及 $\sin(-n\theta)=-\sin n\theta$ 这些关系式，则(8)及(9)变为

$$\cos(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\cos 2n\theta \tag{10}$$

及

$$\sin(x\sin\theta)=2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(x)\sin(2n-1)\theta. \tag{11}$$

作为(10)的一个特例，我们指出 $\theta=0$ 时可得有意义的级数

$$1=J_0(x)+2J_2(x)+2J_4(x)+\cdots$$

又，若在(10)及(11)中取 $\theta=\pi/2$，则得公式

$$\cos x=J_0(x)-2J_2(x)+2J_4(x)-\cdots$$

及

$$\sin x=2J_1(x)-2J_3(x)+2J_5(x)-\cdots,$$

这又一次表明了贝塞耳函数与三角函数之间的密切连系.

(8)和(9)的最重要的应用在于它可以证明**贝塞耳积分公式**

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta-x\sin\theta)d\theta. \tag{12}$$

为证此式, 以$\cos m\theta$乘(8), 以$\sin m\theta$乘(9), 然后相加, 得到

$$\cos(m\theta-x\sin\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\cos(m-n)\theta.$$

当两边都从$\theta=0$积分到$\theta=\pi$,右边化为$\pi J_m(x)$, 于是把m换成n后便得(12)式. 贝塞耳在他的天文工作中碰到这种积分形式的函数$J_n(x)$, 并根据这种形式推出了它的许多性质①.

一些连分式. 若将 35-(7)中的恒等式写为

$$J_{p-1}(x)=\frac{2p}{x}J_p(x)-J_{p+1}(x),$$

然后以$J_p(x)$除之, 得到

$$\frac{J_{p-1}(x)}{J_p(x)}=\frac{2p}{x}-\frac{1}{J_p(x)/J_{p+1}(x)}$$

若再把这公式用于右边第二项的分母(以$p+1$代替p), 并继续不断地这样做下去, 便得出

$$\frac{J_{p-1}(x)}{J_p(x)}=\frac{2p}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{2p+2}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{2p+4}{x}-\cdots}}$$

这是比$J_{p-1}(x)/J_p(x)$的无穷连分式展开式. 我们不能在这里考察这种展开式的理论. 然而值得指出的是, 若$p=\frac{1}{2}$, 则自习题 34-5 可知 $J_{-\frac{1}{2}}(x)/J_{\frac{1}{2}}(x)=\cot x$, 故

① 要了解贝塞耳原来那个问题, 可参看 Gray and Mathews 一书中的叙述, pp. 4—7.

$$\tan x=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-\cdots}}}.$$

这个连分式是兰伯特(Lambert)于 1761 年发现的,他以此来证明 π 是无理数. 他的推理方式是这样的: 若 x 是个非 0 的有理数, 则此连分数的形式说明 $\tan x$ 不可能是有理数; 然而 $\tan \pi/4=1$, 故 $\pi/4$ 与 π 都不是有理数. 兰伯特论证中的一些小纰漏在大约 30 年之后为勒让特所补正.

第七章　一阶方程组

36. 微分方程组概说

n 个联立的一阶微分方程的方程组是分析的基本概念之一．若 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是一个自变量 x 的未知函数，则在我们所要研究的最一般的方程组中，它们的导数 $y_1', y_2', \cdots, y_n'$ 是以 x 及 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的显函数形式给出的：

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{aligned} \tag{1}$$

在许多科学问题中很自然地会出现微分方程组．在下面的例子中，我们将看到它们是怎样出现在有几个自由度的动力系统中，并在第 39 节中，我们将用它们来分析由相互制约的不同类动物组成的简单生物集团．

从数学上讲，研究方程组的一个重要的原因，是由于单独一个 n 阶方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

常可看作是(1)的一个特殊情形．为此，可令

$$y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \tag{3}$$

并注意(2)等价于下列方程组

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\cdots\cdots \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \end{aligned} \tag{4}$$

而这显然是(1)的一个特例．我们说(2)与(4)等价，意思是：若 $y(x)$ 是方程(2)的一个解，则由(3)所规定的函数 $y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$ 满

足(4); 反之,若 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 满足(4),则 $y(x)=y_1(x)$ 是(2)的一个解.

把一个 n 阶方程这样化成 n 个一阶方程的方程组后有好些好处. 例如,我们试就方程组(1)和方程(2)来考察它们的存在和唯一性基本定理之间的联系.

若选取一固定点 $x=x_0$,并注意指定未知函数的值

$$y_1(x_0)=a_1, y_2(x_0)=a_2, \cdots, y_n(x_0)=a_n, \tag{5}$$

使函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 能有定义,则(1)就给出 $y_1'(x_0), \ y_2'(x_0), \cdots, y_n'(x_0)$ 这些导数之值. 这一情况与第 2 节所讨论的类似之处,引起我们提出类似毕卡定理的下述命题:

定理A. 设函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 及其偏导数 $\partial f_1/\partial y_1, \ \cdots, \ \partial f_1/\partial y_n, \ \cdots, \partial f_n/\partial y_1, \cdots, \partial f_n/\partial y_n$ 在 $(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 空间一个域 R 上连续. 若 $(x_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 R 的一个内点,则方程组(1)具有满足初始条件(5)的唯一的解 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$.

我们不拟证明这个定理,只是指出,当准备好适当的基础之后,它的证法同第十一章中毕卡定理的证明完全一样. 又由于上述那种互相转化的关系,定理A也把关于方程(2)的下述相应定理作为其特例包括在内.

定理B. 设函数 f 及其偏导数 $\partial f/\partial y, \partial f/\partial y', \cdots, \partial f/\partial y^{(n-1)}$ 在 $(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 空间的域 R 上连续. 若 $(x_0, a_1, a_2, \cdots a_n)$ 是 R 的一个内点,则方程(2)具有满足初始条件 $y(x_0)=a_1, y'(x_0)=a_2, \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=a_n$ 的唯一的解 $y(x)$.

作为说明高阶方程化成一阶方程组后有什么好处的另一个例子,我们来考察古典力学中著名的 n 体问题.

设有 n 个质量为 m_i 的质点分别位于 (x_i, y_i, z_i) 处,并假定它们按牛顿引力定律互相吸引. 若 r_{ij} 是 m_i 与 m_j 间的距离, θ 是它们的连线与正 x 轴的夹角(图 38),则 m_j 作用于 m_i 上的力在 x 方向的分量是

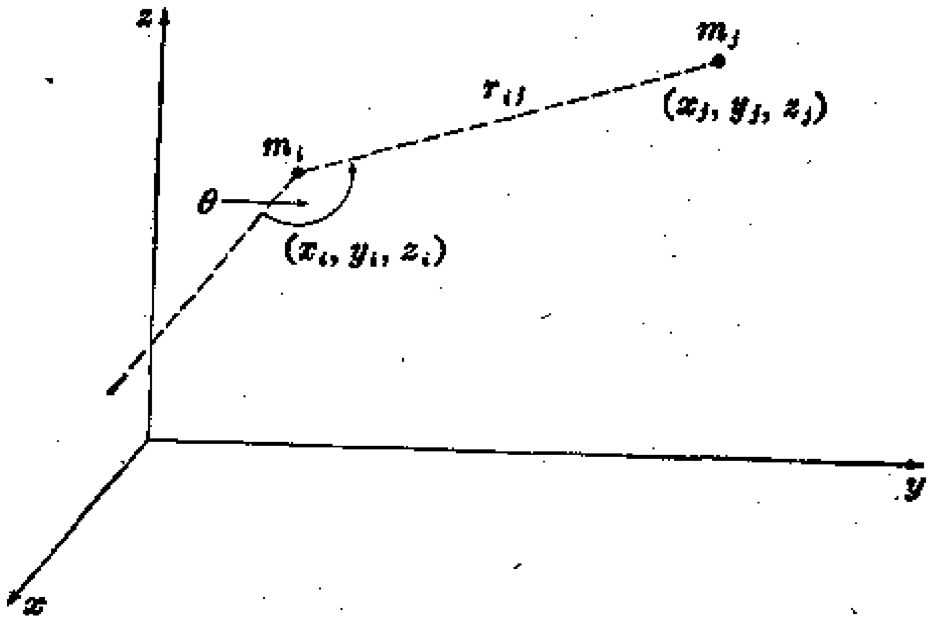


图 38

$$\frac{Gm_im_j}{r_{ij}^2}\cos\theta=\frac{Gm_im_j(x_j-x_i)}{r_{ij}^3},$$

其中 G 是引力常数. 由于对一切 $j\neq i$，这些分量之和等于 $m_i(d^2x_i/dt^2)$，故得 n 个二阶微分方程

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=G\sum_{j\neq i}\frac{m_j(x_j-x_i)}{r_{ij}^3},$$

并类似地有

$$\frac{d^2y_i}{dt^2}=G\sum_{j\neq i}\frac{m_j(y_j-y_i)}{r_{ij}^3}$$

及

$$\frac{d^2z_i}{dt^2}=G\sum_{j\neq i}\frac{m_j(z_j-z_i)}{r_{ij}^3}.$$

度(即各未知函数在某一时刻 $t=t_0$ 的值)已经给定，且若各质点并不互撞(意即 r_{ij} 这些数不等于0)，则各质点在此后的位置和速度都唯一确定. 这一结论曾是那在哲学上一度风行的机械确定论所产生的背景，而根据机械确定论，宇宙只不过是个无比庞大的机器，它的未来状态由它在任一时刻的给定状态无容置辩地决定①.

习　题

1. 试将下列微分方程换成等价的一阶微分方程组：
   a. $y''-x^2y'-xy=0$;
   b. $y'''=y''-x^2(y')^2$.
2. 若质量 m 的粒子在 xy 平面运动，它的运动方程是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f(t,x,y)\quad 及\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=g(t,x,y),$$

   其中 f 及 g 是作用于粒子上的力的 x 分量及 y 分量. 试将此二阶微分方程组改换成形式如(1)的四个一阶方程的等价组.

37. 线性方程组

为便于讲解并使其头绪清楚，本章以后部分将只限于讨论两个未知函数的一阶方程组，其形式为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(t,x,y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=G(t,x,y).\end{cases}\tag{1}$$

左边的花括号是为了强调指出这两个方程是连系在一起的，至于取字

① 这种观点使琴斯爵士(Sir James Jeans)把宇宙定义为"$6N$ 个联立微分方程的自行求解方程组，其中 N 是艾丁顿(Eddington)数."艾丁顿曾指出(其诗意超过科学真实性)宇宙中质点的总数是

$$N=\frac{3}{2}\times136\times2^{256}.$$

读者可参阅 Jeans 著《天文世界》("The Astronomical Horizon", Oxford University Press, 1945)一书，或 Eddington 著《膨胀中的宇宙》("The Expanding Universe", Cambridge University Press, London, 1952).

母 t 为自变量取 x 及 y 为因变量是在这种情形下的通常习惯，其理由往下可以知道.

在本节及下一节中，我们还要进一步加以限制，即专门讨论线性方程组，其形式为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)y+f_1(t)\\ \dfrac{dy}{dt}=a_2(t)x+b_2(t)y+f_2(t).\end{cases} \tag{2}$$

在现在进行的讨论里以及在往下所叙述的定理中，我们假定函数 $a_i(t)$, $b_i(t)$, 及 $f_i(t)(i=1,2)$ 在 t 轴的某个闭区间 $[a, b]$ 上连续. 若 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 恒等于 0，方程组(2)就叫做齐次的；否则就叫非齐次的. (2) 在 $[a,b]$ 上的一个解当然是在整个区间上满足方程(2)的两个函数 $x(t)$ 及 $y(t)$. 我们将把这样一个解写成如下形式：

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t).\end{cases}$$

这样，我们易于验证(常系数)齐次线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y\end{cases} \tag{3}$$

在任何闭区间上有两个解

$$\begin{cases}x=e^{3t}\\ y=e^{3t}\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}x=e^{2t}\\ y=2e^{2t}.\end{cases} \tag{4}$$

现在我们概要讲一下线性方程组(2)的一般理论. 我们将看到，这一理论同第 14 及 15 节所描述的二阶线性方程理论非常相似. 我们先叙述基本的存在与唯一性定理，其证明在第十一章中给出.

定理A. 若 t_0 是区间 $[a,b]$ 的任一点，且若 x_0 及 y_0 是任意的数，则在整个 $[a,b]$ 上，(2)具有且仅有一个解

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t),\end{cases}$$

以使 $x(t_0)=x_0$ 及 $y(t_0)=y_0$.

我们的第二步是研究齐次方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=a_2(t)x+b_2(t)y\end{cases}\tag{5}$$

(这是由(2)中去掉 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 而得出的) 的解的结构. 显然, (5)可以被一个所谓平凡解所满足, 这就是指 $x(t)$ 及 $y(t)$ 都恒等于 0 的那种解. 我们之借以得出更有用的解, 主要工具是下述定理.

定理 B. 若齐次方程组(5)在$[a,b]$上有两个解

$$\begin{cases}x=x_1(t)\\y=y_1(t)\end{cases}\quad 及\quad\begin{cases}x=x_2(t)\\y=y_2(t),\end{cases}\tag{6}$$

则

$$\begin{cases}x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\\y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)\end{cases}\tag{7}$$

也是$[a,b]$上的一个解, 其中 c_1 及 c_2 为任何常数.

证明. 这个证明步骤不过是例行的验算, 留待读者自己去做.

(7)这个解是由(6)中的两个解得出的, 它是由 c_1 乘第一个解 c_2 乘第二个解后相加而得出的; 因此(7)叫做(6)中两个解的线性组合. 利用这个术语, 便可把定理 B 重新叙述为: 齐次方程组(5)的两个解的任何线性组合仍是一个解. 于是(3)具有一个解为

$$\begin{cases}x=c_1e^{3t}+c_2e^{2t}\\y=c_1e^{3t}+2c_2e^{2t},\end{cases}\tag{8}$$

其中 c_1 及 c_2 为任意选取的常数.

我们必须解决的第二个问题是: (7)是否包含了(5)在$[a,b]$上的所有的解, 即它是否为(5)在$[a,b]$上的通解. 根据定理 A, 若可把(7)中的常数 c_1 及 c_2 这样选取, 使它能满足$[a,b]$的任一点 t_0 处的任意条件 $x(t_0)=x_0$ 及 $y(t_0)=y_0$, 则(7)将是通解. 或者, 等价地说, 若以 c_1 及

c_2为未知数的线性代数方程组

$$c_1x_1(t_0)+c_2x_2(t_0)=x_0$$

$$c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)=y_0$$

对于[a,b]的每一个 t_0 以及每两个数 x_0 及 y_0 都可解，则(7)是通解. 而根据行列式的初等理论，这在系数行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}$$

在区间[a,b]上不等于 0 时是可能的. 这个行列式叫(6)的两个解的朗氏式(参看习题 4)，而以上所讲就证明了下述定理.

定理 C. 若齐次方程组(5)的两个解(6)具有在[a, b]上不等于 0 的朗氏式$W(t)$，则(7)是(5)在该区间上的通解.

从这个定理可知(8)是(3)在任何闭区间上的通解，因为(4)中两个解的朗氏式

$$W(t)=\begin{vmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2e^{2t} \end{vmatrix}=e^{5t}$$

决不会等于 0. 正如这个例子所提示给我们的，两个解的朗氏式 $W(t)$ 之是否为零并不依赖于 t 的选取，这一点很值得知道. 现把它正式陈述为

定理 D. 若$W(t)$是齐次方程组(5)的两个解(6)的朗氏式，则$W(t)$在[a,b]上或者恒等于 0 或者没有一处等于 0.

证明. 从简单的计算可知$W(t)$满足一阶微分方程

$$\frac{dW}{dt}=[a_1(t)+b_2(t)]W, \tag{9}$$

由此知

$$W(t)=ce^{\int[a_1(t)+b_2(t)]dt}, \tag{10}$$

其中 c 为某一常数. 由于(10)的一个因子指数函数在[a, b]上决不会等于 0，定理的结论就很显然了.

定理 C 足以用来验证(7)是(5)的通解：只要证明两个解(6)的朗

氏式$W(t)$不等于 0 就行了．现再讲一个更直接而方便的检验法．

两个解(6)说是在$[a,b]$上线性相关的，若其中之一是另一个的常数倍，也就是，若对于某个常数 k 以及$[a,b]$里的所有 t，有

$$\begin{aligned} x_1(t)&=kx_2(t) \\ y_1(t)&=ky_2(t) \end{aligned} \quad 或 \quad \begin{aligned} x_2(t)&=kx_1(t) \\ y_2(t)&=ky_1(t); \end{aligned}$$

并且说它们是线性无关的，若它们之中那一个也不是另一个的常数倍．线性相关显然相当于下面的条件：存在两个不全等于零的常数 c_1 及c_2，使得对于$[a,b]$里的一切 t 有

$$\begin{aligned} c_1x_1(t)+c_2x_2(t)&=0 \\ c_1y_1(t)+c_2y_2(t)&=0. \end{aligned} \tag{11}$$

现在我们有下面的定理．

定理 E．若齐次方程组(5)的两个解(6)在$[a,b]$上线性无关，则(7)是(5)在这区间上的通解．

证明．由于定理C及D，现只要证明两个解(6)为线性相关，当且仅当它们的朗氏式$W(t)$恒等于 0．先假定它们线性相关，因而有

$$\begin{aligned} x_1(t)&=kx_2(t) \\ y_1(t)&=ky_2(t). \end{aligned} \tag{12}$$

于是对于$[a,b]$里的一切 t 有

$$\begin{aligned} W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}&=\begin{vmatrix} kx_2(t) & x_2(t) \\ ky_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \\ &=kx_2(t)y_2(t)-kx_2(t)y_2(t)=0. \end{aligned}$$

如果常数 k 在方程(12)的另一侧，同样的论证仍然照旧有效．现在假定$W(t)$恒等于 0 而来证明两个解(6)按方程(11) 的意义线性相关．设 t_0 是$[a,b]$里一个定点．由于 $W(t_0)=0$，线性代数方程组

$$c_1x_1(t_0)+c_2x_2(t_0)=0$$

$$c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)=0$$

具有不全为 0 的解 c_1, c_2．于是(5)的由

$$\begin{cases} x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t) \\ y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t) \end{cases} \tag{13}$$

所给出的解，等于 t_0 处的平凡解. 现根据定理A的唯一性部分，可知(13)在整个区间$[a,b]$上必等于平凡解，于是(11)成立. 定理证毕.

这个检验法的优点是：在有些特定问题里，(5)的两个解是否线性相关往往是一眼就能看出来的事.

现在回到非齐次方程组(2)，并以下述定理来结束我们的讨论.

定理F. 若齐次方程组(5)的两个解(6)在$[a,b]$上线性无关，且若

$$\begin{cases} x=x_p(t) \\ y=y_p(t) \end{cases}$$

是(2)在该区间上的任一特解，则

$$\begin{cases} x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+x_p(t) \\ y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+y_p(t) \end{cases} \tag{14}$$

是(2)在$[a,b]$上的通解.

证明. 这里只要证明：若

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

是(2)的任一解，则

$$\begin{cases} x=x(t)-x_p(t) \\ y=y(t)-y_p(t) \end{cases}$$

是(5)的一个解. 这事留给读者去做.

上述对线性方程组(2)的处理方法，说明它的通解(14)可以怎样从比较简单的部分构成. 但怎样能找出这些部分呢？遗憾的是，正如在二阶线性方程的情形一样，并没有什么万无一失的通用方法. 下一节里我们要讨论这个问题可得到解决的一个重要特殊情形：当系数 $a_i(t)$ 及 $b_i(t)(i=1,2)$ 为常数时的情形.

习　题

1. 求证定理 B.

2. 试完成定理 F 的证明.

3. 试验证方程(9).

4. 设二阶线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+P(t)\frac{dx}{dt}+Q(t)x=0 \tag{*}$$

已化为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-Q(t)x-P(t)y.\end{cases} \tag{**}$$

若 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 是方程(*)的解, 且若

$$\begin{cases}x=x_1(t)\\ y=y_1(t)\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}x=x_2(t)\\ y=y_2(t)\end{cases}$$

是(**)的相应的解, 试证前者按第 15 节所讲的朗氏式恰好就是后者按本节所讲的朗氏式.

5. a. 试证

$$\begin{cases}x=e^{4t}\\ y=e^{4t}\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}x=e^{-2t}\\ y=-e^{-2t}\end{cases}$$

是下列齐次方程组的解:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+3y\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+y.\end{cases}$$

b. 试用两种方法证明(a)中所给解在每一闭区间上线性无关, 并写出这个方程组的通解.

c. 求这个方程组的特解

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

使它适合 $x(0)=5$ 及 $y(0)=1$.

6. a. 试证

$$\begin{cases}x=2e^{4t}\\ y=3e^{4t}\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}x=e^{-t}\\ y=-e^{-t}\end{cases}$$

是下列齐次方程组的解:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=3x+2y.\end{cases}$$

b. 试用两种方法证明(a)中所给方程组的解在每个闭区间上线性无关，并写出这方程组的通解.

c. 试证

$$\begin{cases}x=3t-2\\y=-2t+3\end{cases}$$

是非齐次方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y+t-1\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=3x+2y-5t-2\end{cases}$$

的一个特解，并写出这个方程组的通解.

7. 试按下述步骤，求出题 6 中所给出的齐次方程组的解.

a. 把第一个方程对 t 微分并消去 y;

b. 把第二个方程对 t 微分并消去 x.

8. 用题 7 所提示的方法求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=y\end{cases}$$

的通解.

9. a. 求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=y\end{cases}$$

的通解.

b. 试证，由(a)中的方程组得出的任一二阶方程并不等价于此方程组，意即二阶方程的有一些解并不属于方程组的解．因此，虽然高阶方程等价于方程组，但方程组并不等价于高阶方程，故方程组是更为一般性的.

38. 常系数齐次线性方程组

现在我们可以给出简单方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1x+b_1y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=a_2x+b_2y\end{cases}\tag{1}$$

(其中 a_1, b_1 及 a_2, b_2 是给定常数)的完全显式解了. 上节末一些习题里的做法常可应用到这种方程上: 微分一个方程,消去一个因变量,求解所得的二阶线性方程. 现在所要讲的方法则依据于直接从所给方程组作出两个线性无关的解.

如果利用指数函数的导数等于其本身常数倍这一事实,那就(正如在第 17 节中那样)自然会按

$$\begin{cases}x=Ae^{mt}\\y=Be^{mt}\end{cases}\tag{2}$$

这种形式来求(1)的解. 把(2)代入(1),得到

$$Ame^{mt}=a_1Ae^{mt}+b_1Be^{mt}$$
$$Bme^{mt}=a_2Ae^{mt}+b_2Be^{mt};$$

除以 e^{mt} 后,得出关于未知数 A 及 B 的线性代数方程

$$\begin{aligned}(a_1-m)A+b_1B&=0\\a_2A+(b_2-m)B&=0.\end{aligned}\tag{3}$$

(3)显然具有平凡解 $A=B=0$, 这就使(2) 成为(1)的平凡解. 由于我们要找(1)的非平凡解,所以这对我们毫无帮助. 然而,我们知道(3)在下列条件下具有非 0 解: 当它的系数行列式等于 0, 也就是当

$$\begin{vmatrix}a_1-m & b_1\\ a_2 & b_2-m\end{vmatrix}=0.$$

行列式展开后,得 m 的二次方程

$$m^2-(a_1+b_2)m+(a_1b_2-a_2b_1)=0.\tag{4}$$

仿照以前所讲的，我们把(4)叫做方程组(1)的**辅助方程**. 设 m_1 及 m_2 是(4)的根. 若以 m_1 代(3)中的 m，则知可得方程具有一个非平凡解 A_1, B_1，故

$$\begin{cases} x = A_1 e^{m_1 t} \\ y = B_1 e^{m_1 t} \end{cases} \tag{5}$$

是方程组(1)的一个非平凡解. 对 m_2 作同样处理，得另一个非平凡解

$$\begin{cases} x = A_2 e^{m_2 t} \\ y = B_2 e^{m_2 t}. \end{cases} \tag{6}$$

为使我们能肯定知道所得的是两个线性无关解(因而得出通解)，必须考察 m_1 及 m_2 的三种可能的情形.

不同实根. 当 m_1 及 m_2 是不同实根时，则易见(5)与(6)是线性无关的(何故？)于是

$$\begin{aligned} x &= c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y &= c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t} \end{aligned} \tag{7}$$

是(1)的通解.

例 1. 在方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases} \tag{8}$$

的情形下，(3)是

$$\begin{aligned} &(1-m)A + B = 0 \\ &4A + (-2-m)B = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

这里的辅助方程是

$$m^2 + m - 6 = 0 \quad 或 \quad (m+3)(m-2) = 0,$$

故 m_1 及 m_2 分别为 -3 及 2. 取 $m=-3$，(9)变为

$$4A + B = 0$$

$$4A + B = 0.$$

这个方程组的一个简单的非平凡解是 $A=1, B=-4$，故得

$$\begin{cases} x=e^{-3t} \\ y=-4e^{-3t} \end{cases} \tag{10}$$

作为(8)的一个非平凡解. 取 $m=2$,(9)变为

$$-A+B=0$$

$$4A-4B=0,$$

一个简单的非平凡解是 $A=1, B=1$. 这使我们得出

$$\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=e^{2t} \end{cases} \tag{11}$$

作为(8)的另一个解; 由于(10)及(11)显然线性无关,故

$$\begin{cases} x=c_1e^{-3t}+c_2e^{2t} \\ y=-4c_1e^{-3t}+c_2e^{2t} \end{cases} \tag{12}$$

是(8)的通解.

不同的复根. 若 m_1 及 m_2 是不同的复数,则它们可写为 $a\pm ib$ 的形式,其中 a 及 b 是实数且 $b\neq 0$. 这时可料想从(3)得出的 A 及 B 等数也是复数,于是有两个线性无关解

$$\begin{cases} x=A_1^*e^{(a+ib)t} \\ y=B_1^*e^{(a+ib)t} \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} x=A_2^*e^{(a-ib)t} \\ y=B_2^*e^{(a-ib)t}. \end{cases} \tag{13}$$

然而这些是复数解,为得出实值解,我们按下法来做. 若把数 A_1^* 及 B_1^* 表示为标准形式 $A_1^*=A_1+iA_2$, $B_1^*=B_1+iB_2$,并利用欧拉公式17-(7),则(13)中的第一个解可写为

$$\begin{cases} x=(A_1+iA_2)e^{at}(\cos bt+i\sin bt) \\ y=(B_1+iB_2)e^{at}(\cos bt+i\sin bt) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x=e^{at}[(A_1\cos bt-A_2\sin bt)+i(A_1\sin bt+A_2\cos bt)] \\ y=e^{at}[(B_1\cos bt-B_2\sin bt)+i(B_1\sin bt+B_2\cos bt)]. \end{cases} \tag{14}$$

容易看出,若有两个复值函数是实系数方程(1)的解,则它们的两个实部和两个虚部是实值的解. 由此可知从(14)能得出两个实值解

$$\begin{cases} x=e^{at}(A_1\cos bt-A_2\sin bt) \\ y=e^{at}(B_1\cos bt-B_2\sin bt) \end{cases} \tag{15}$$

及

$$\begin{cases} x=e^{at}(A_1\sin bt+A_2\cos bt) \\ y=e^{at}(B_1\sin bt+B_2\cos bt) \end{cases} \tag{16}$$

可以证明这两个解线性无关(我们在习题 3 里要求读者证明它)，故这时的通解是

$$\begin{aligned} x&=e^{at}[c_1(A_1\cos bt-A_2\sin bt) \\ &\qquad +c_2(A_1\sin bt+A_2\cos bt)] \\ y&=e^{at}[c_1(B_1\cos bt-B_2\sin bt) \\ &\qquad +c_2(B_1\sin bt+B_2\cos bt)]. \end{aligned} \tag{17}$$

由于通解已得出，故无需再考虑(13)中的第二个解.

相等的实根. 当 m_1 及 m_2 有相同的值 m 时，(5)及(6)并非线性无关，于是我们实质上只有一个解

$$\begin{cases} x=Ae^{mt} \\ y=Be^{mt}. \end{cases} \tag{18}$$

我们从第 17 节里的经验使我们想去找下列形式的第二个线性无关的解：

$$\begin{cases} x=Ate^{mt} \\ y=Bte^{mt}. \end{cases}$$

可惜事情并不这么简单，而实际上我们必须按形式

$$\begin{cases} x=(A_1+A_2t)e^{mt} \\ y=(B_1+B_2t)e^{mt} \end{cases} \tag{19}$$

来求第二个解，故通解是

$$\begin{aligned} x&=c_1Ae^{mt}+c_2(A_1+A_2t)e^{mt} \\ y&=c_1Be^{mt}+c_2(B_1+B_2t)e^{mt}. \end{aligned} \tag{20}$$ ①

---

① 这命题的唯一例外发生在 $a_1=b_1=a$ 及 $a_2=b_2=0$ 的情形，那时辅助方程是 $m^2-2am+a^2=0, m=a$，于是(18)中的常数 A 及 B 完全不受限制．这时(1)的通解显然是

$$\begin{cases} x=c_1e^{mt} \\ y=c_2e^{mt}. \end{cases}$$

于是就说方程组是不匹配的(因为每个方程可以独立求解而不受另一个的影响)．

常数 A_1, A_2, B_1, 及 B_2 是将(19) 代入方程组(1)之后得出的．我们现在不在一般情形下做出详细计算，而是用一个简单的实例来说明这方法是怎么做的．

例 2． 在方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-4y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x-y\end{cases}\tag{21}$$

的情形下，(3)是

$$\begin{aligned}(3-m)A-4B&=0\\A+(-1-m)B&=0.\end{aligned}\tag{22}$$

辅助方程是

$$m^2-2m+1=0 \quad 或 \quad (m-1)^2=0,$$

它具有等根 1 及 1．取 $m=1$，(22)变为

$$\begin{aligned}2A-4B&=0\\A-2B&=0.\end{aligned}$$

这个方程组的一个简单的非平凡解是 $A=2, B=1$，故

$$\begin{cases}x=2e^t\\y=e^t\end{cases}\tag{23}$$

是(21)的一个非平凡解．现在我们来求形如

$$\begin{cases}x=(A_1+A_2t)e^t\\y=(B_1+B_2t)e^t\end{cases}\tag{24}$$

的第二个线性无关解．把它代入(21)后，得到

$$\begin{aligned}(A_1+A_2t+A_2)e^t&=3(A_1+A_2t)e^t-4(B_1+B_2t)e^t\\(B_1+B_2t+B_2)e^t&=(A_1+A_2t)e^t-(B_1+B_2t)e^t,\end{aligned}$$

这可以立即化简为

$$\begin{aligned}(2A_2-4B_2)t+(2A_1-A_2-4B_1)&=0\\(A_2-2B_2)t+(A_1-2B_1-B_2)&=0.\end{aligned}$$

由于这些都是对于 t 的恒等式，故必有

$$2A_2-4B_2=0 \qquad 2A_1-A_2-4B_1=0$$

$$A_2-2B_2=0 \qquad A_1-2B_1-B_2=0.$$

左边两个方程以 $A_2=2, B_2=1$ 为其一个简单的非平凡解. 以此二值代入，右边的两个方程变为

$$2A_1-4B_1=2$$

$$A_1-2B_1=1,$$

故可取 $A_1=1, B_1=0$. 现在把这些数代入(24)，得第二个解为。

$$\begin{cases}x=(1+2t)e^t\\ y=te^t.\end{cases} \tag{25}$$

(23)与(25)显然是线性无关的，故

$$\begin{cases}x=2c_1e^t+c_2(1+2t)e^t\\ y=c_1e^t+c_2te^t\end{cases} \tag{26}$$

是方程组(21)的通解.

习　题

1. 用本节所讲方法求下列方程组的通解：

a. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x+4y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+3y;\end{cases}$　　d. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-3y\\ \dfrac{dy}{dt}=8x-6y;\end{cases}$

b. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-2y\\ \dfrac{dy}{dt}=5x+2y;\end{cases}$　　e. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x\\ \dfrac{dy}{dt}=3y;\end{cases}$

c. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x+4y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y;\end{cases}$　　f. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-4x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y;\end{cases}$

g. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=7x+6y\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+6y;\end{cases}$　　h. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y\\ \dfrac{dy}{dt}=4x+5y.\end{cases}$

2. 试证方程组(1)具有形如(2)的两个实值线性无关解的充分条件是 $a_2b_1>0$, 但这并非必要条件.

3. 试证(15)及(16)两个解的朗氏式是

$$W(t)=(A_1B_2-A_2B_1)e^{2\alpha t}\quad,$$

并证明 $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$.

4. 试证公式(20)中的常数 A_2 及 B_2 与常数 A 及 B 都满足同一个线性代数方程组, 因而可取 $A_2=A$ 及 $B_2=B$ 而无损于一般性.

5. 设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)y+f_1(t)\\ \dfrac{dy}{dt}=a_2(t)x+b_2(t)y+f_2(t)\end{cases}\tag{*}$$

及相应的齐次方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)y\\ \dfrac{dy}{dt}=a_2(t)x+b_2(t)y.\end{cases}\tag{**}$$

a. 若 $\begin{cases}x=x_1(t)\\ y=y_1(t)\end{cases}$ 及 $\begin{cases}x=x_2(t)\\ y=y_2(t)\end{cases}$

是(**)的线性无关解, 从而

$$\begin{cases}x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\\ y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)\end{cases}$$

是它的通解, 试证

$$\begin{cases}x=v_1(t)x_1(t)-v_2(t)x_2(t)\\ y=v_1(t)y_1(t)-v_2(t)y_2(t)\end{cases}$$

将为(*)的一个特解, 如果函数 $v_1(t)$ 及 $v_2(t)$ 满足下列方程组

$$v_1'x_1+v_2'x_2=f_1$$
$$v_1'y_1+v_2'y_2=f_2.$$

[illegible]

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-5t+2\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=4x-2y-8t-8\end{cases}$$

的一个特解. 这个方程组的相应齐次方程组已在例1中解出.

39. 非线性方程组. 伏尔台拉弱肉强食方程

谁都知道,生活在同一环境中的各类动物之间有不断的生存竞争.一类动物靠攫食另一类生活;而第二类则借发展逃逸手段以免被吞食;如此等等.

作为这类普遍存在的弱肉强食斗争的一个简单的例子,设想有一个海岛,上面住着狐狸和野兔. 狐狸吃兔,而兔吃翘摇草. 假定翘摇草产量丰富,兔食总是很多的. 兔子数目多,狐狸容易得食,它们的总数就增多. 当狐狸变得太多而吃掉太多的兔子时,它们就进入饥饿状态,总数开始下降. 狐狸一少兔子相对地较为安全,它们的总数又开始增多. 这又引起狐狸总数的新的增加,并且随着时间的推移,这两类动物总数相关的增减,无休止地出现重复的循环. 这些变动的情况如图39所示,其中所画曲线表示总数随时间而变的情况.

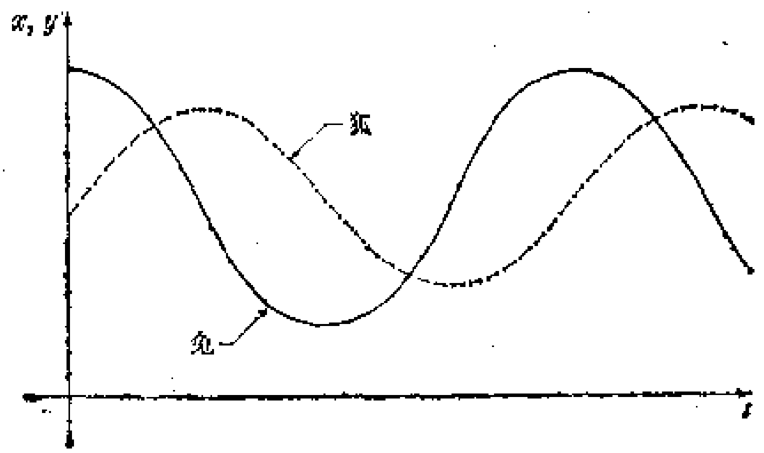


图 39

这类问题曾经被数学家和生物学家研究过,而且怪有意思的是,我们即将讲的从数学上得出的结论,竟能肯定和充实上段文字所叙述的

直观思想. 在讨论狐兔之间的相互作用时, 我们将采用伏尔台拉的方法, 他是首先用定量方法研究这类问题的人①.

若 x 是 t 时的兔数, 由于翘摇草供应无限, 且若狐狸数目 y 是 0, 则应有

$$\frac{dx}{dt}=ax, \quad a>0.$$

单位时间内狐兔相遇的次数自然可以假定与 x 及 y 一起成正比. 若再假定在这些相遇次数中, 兔子被吃掉的机会占一定比例, 则有

$$\frac{dx}{dt}=ax-bxy, \quad a \text{ 及 } b>0.$$

同样

$$\frac{dy}{dt}=-cy+dxy, \quad c \text{ 及 } d>0;$$

因若没有兔子狐狸就要绝踪, 而狐狸数目的增多依赖于它们与兔子相遇的次数. 故得以下的非线性方程组, 描述这两类动物之间的相互作用:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(a-by)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-y(c-dx).\end{cases} \tag{1}$$

方程 (1) 叫**伏尔台拉弱肉强食方程**. 遗憾的是这方程不能用初等函数解出. 但若把其中的未知函数

---

① 伏尔台拉(Vito Volterra, 1860—1940) 是杰出意大利数学家. 他早年在积分方程方面的研究(同弗莱德荷蒙与希尔柏脱的工作一起), 使线性分析开始得到全面的发展, 成为二十世纪前半叶数学的主流. 他晚年对数理生物学的精力充沛的涉猎, 使数学和生物学都丰富了内容。读者若欲进一步了解详情, 可參阅他的《生存竞争数学理论讲义》(“Leçons sur la théorie mathématigue de la lutte pour la vie”), 或 A. J. Lotka《数理生物学初步》(“Elements of Mathematical Biology”, pp. 88-94)。较近的研究有 E. R. Leigh 在《生物学中的一些数学问题》中论伏尔台拉方程在生态学方面的作用(美国数学会出版, 1968), 其中讨论了加拿大从 1847 到 1903 年大山猫和兔子的数目(根据哈得孙湾公司的资料).

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$$

看作是 xy 平面上一根曲线的参数方程，那末我们可以求出这曲线的直角坐标方程. 把(1)的两式相除消去 t，并分离变量，得到

$$\frac{(a-by)dy}{y}=-\frac{(c-dx)dx}{x}$$

积分后，得到

$$a\log y-by=-c\log x+dx+\log K$$

或

$$y^a e^{-by}=Kx^{-c}e^{dx},\tag{2}$$

其中常数 K 可通过 x 及 y 的初值由下式给出

$$K=x_0^c y_0^a e^{-dx_0-by_0}.$$

我们虽然不能从(2)解出 x 或 y，但可用伏尔台拉所发明的一种巧妙方法来确定曲线上的点. 为此，我们使(2)的左边和右边分别等于新变量 z 及 w，然后如图 40 所示画出函数

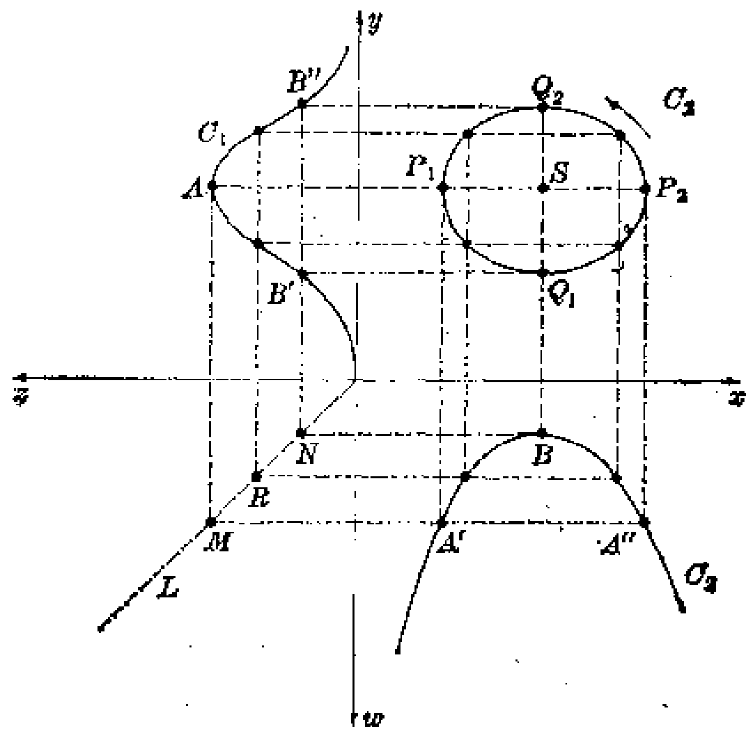


图 40

$$z=y^a e^{-by} \quad 与 \quad w=Kx^{-c}e^{dx} \tag{3}$$

的图线 C_1 及C_2. 由于 $z=w$, 我们在第三象限里只能限制在虚线 L 上. 同 C_1 上是 A 所给最大 z 值相对应的, 有一个 y 值和(通过 L 上的 M 以及 C_2 上的相应点 A' 及 A'' 所引起的对应)两个 x 值, 这两个 x 值确定了 x 的变化范围. 同样, C_2 上是 B 所给的极小 w 值引出 L 上的 N 从而引出 C_1 上的 B' 及 B'', 而这两点确定了 y 的变化范围. 这样我们画出了所求曲线 C_3 上的点 P_1, P_2 以及 Q_1, Q_2. 其他的点也容易画出, 这只要如图 40 所示那样, 从 L 上 M 与 N 之间的任一点 R 出发, 投射到 C_1 再投向 C_3, 然后从 R 投射到 C_2 再往上投射到 C_3. 改变 K 值的结果显然将会使 B 点的位置上升或下降, 因而会使曲线 C_3 放大或缩小. 因此, 当我们给 K 以不同的数值时, 就得出点 S 周围的一族卵线, 而 S 是当 w 的极小值等于 z 的极大值时 C_3 上剩下的唯一的点.

其次我们指出, 当 t 增大时, C_3 上的相应点(x, y)是依反时针方向沿曲线移动的. 为看出这一点, 我们先指出方程(1)给出了曲线上动点速度的水平分量与垂直分量. 根据公式 (3) 作简单计算的结果, 得点 S 的坐标为 $x=c/d$, $y=a/b$. 当 $x<c/d$, 则由(1)的第二个方程可知 dy/dt 为负, 故 C_3 上的点描出弧 $Q_2P_1Q_1$ 时是朝下运动的. 同样, 它沿弧 $Q_1P_2Q_2$ 是朝上移动的, 这就证明了所说的事.

最后, 我们以狐兔问题为例来说明重要的**线性化方法**. 第一, 我们看到, 若兔的总数和狐的总数是

$$x=\frac{c}{d} \qquad 及 \qquad y=\frac{a}{b} \tag{4}$$

时, 则方程组(1)满足, 其时 $dx/dt=0$ 又 $dy/dt=0$, 故 x 或 y 都没有什么增减. (4)这样的总数叫**平衡总数**, 因为 x 及 y 可以无限期地维持在这种恒定的总数水平上. 显然这是在 w 的极小值等于 z 的极大值时的特殊情形, 因而卵线 C_3 缩为一点 S. 如果我们回到一般情形而令

$$x=\frac{c}{d}+X \quad 及 \quad y=\frac{a}{b}+Y,$$

则X及Y可以看作是x及y偏离其平衡值的程度. 通过简单的计算可以证明,若把(1)中的x及y换成X及Y[这相当于把点$(c/d, a/b)$移到原点],则(1)就变为

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt}=-\dfrac{bc}{d}Y-bXY\\ \dfrac{dY}{dt}=\dfrac{ad}{b}X+dXY.\end{cases} \tag{5}$$

现在我们来实行“线性化”,假定X及Y的值小, 于是(5)中的XY项可以抛弃而不致引起严重的误差. 这样一种假定并不比主观愿望强多少,然而它毕竟能把(5)简化成线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt}=-\dfrac{bc}{d}Y\\ \dfrac{dY}{dt}=\dfrac{ad}{b}X.\end{cases} \tag{6}$$

(6)的通解是容易求的,但把两式相除消去t更容易做,这就得出

$$\frac{dY}{dX}=-\frac{ad^2}{b^2c}\,\frac{X}{Y},$$

它的解立即可以求得为

$$ad^2X^2+b^2cY^2=C^2.$$

这是XY平面上围绕原点的椭圆族. 由于椭圆同图46中的卵线性质上相似,故有相当理由可以指望(6)是(5)的一种可取的近似方程.

我们相信读者会同意狐兔问题本身有其价值. 但除此之外我们还认识到这样一件事实, 即非线性方程组向我们提出了与以前考察过的很不相同的问题. 在研究(1)那样的方程组时,我们懂得要把注意力转向解在xy平面上平衡点附近的性态,而所谓平衡点就是使方程组右边等于0的那些点; 我们又看到为什么周期解(也就是能得出象图40中C那样简单闭曲线的解)是重要而又可取的;我们又约略知道有一种研究非线性方程组的方法, 这就是用线性方程组来逼近它们. 下一章我们将更为充分地研究非线性方程组, 并以更详细更一般的方式来讲解这里提出的每一个论点.

习　　题

1. 试从方程组(1)中消去 y 以得出函数 $x(t)$ 所满足的二阶非线性方程.

2. 试证当 $\frac{dx}{dt}>0$ 时总有 $\frac{d^2y}{dt^2}>0$. 就图 39 的情形来说这一事实有什么意义?

第八章　非线性方程

40. 自治方程组，相平面及其现象

微分方程发展史上有两大趋势．第一个老的趋势的特点是想求出显式的解——以初等函数表示的封闭形式的解(那是很少可能的)或是幂级数形式的解．第二种趋势是根本放弃传统意义下求解的一切企图，而是从定性方面探求解的一般性态．我们曾在第四章里用这种观点处理过线性方程．非线性方程的定性理论是完全不同的．它是庞加莱在1880年左右在其天体力学的工作中奠立的，从那时起，它成为纯粹数学和应用数学家日益感到兴趣的一门学科．

线性微分方程的理论在过去200年间研究得很广泛很深入，成为相当完备相当周到的一门学科．但是对于非线性方程的一般性质却知道得很少．本章目的是概略介绍这一分支的中心思想和方法，并指出它具有线性方程理论中所未见的大量有趣而突出的新现象．读者将会惊奇地发现，大部分这些现象很易于处理，无需用什么高深的数学工具，而实际上只要用初等微积分和二维矢量代数就差不多完全够了．

为什么要对非线性方程那样感兴趣呢？基本原因是许多物理系统——从而描述它们的微分方程——从一开头就是非线性的．通常的线性化方法只是些近似步骤，它们部分地显示出我们承认自己对原来的非线性问题束手无策，部分地表达了吃不饱比没得吃强这样一种实用观点．但是我们应该马上补充说明，在许多物理问题中线性近似是有价值的，而且对于大多数研究目的来说是足够的．但这仍然不能改变这样一个事实，即在许多别的情况下，线性化步骤是不能采取的①．

对于本质上为非线性的问题，我们很容易举出一些简单的例子．

---

① 爱因斯坦甚至提出，由于物理中的基本方程是非线性的，全部数学物理应该重写．如果他的预言正确，那末将来的数学肯定会跟过去和今日的数学大不相同．

例如,设有作等幅振动的摆,其长为 a 而摆坠的质量为 m, 而 x 表示它离开平衡位置的偏角,则从第 5 节可知它的运动方程是

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{a}\sin x=0; \tag{1}$$

若有一正比于摆坠的速度的衰减力,方程就变为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{g}{a}\sin x=0. \tag{2}$$

在通常的线性化步骤中, 我们把 $\sin x$ 换成 x, 这在振幅小的时候是合理的,但当 x 值大时,它就大大歪曲实际情况. 另一类不同的例子可从真空管理论中举出一个,那里推出一个范德波(van der Pol)方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0. \tag{3}$$

以后可以知道,这几个非线性方程都各有其独特的有趣性质.

在整个这一章里, 我们所要讨论的是下列形式的二阶非线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(x,\frac{dx}{dt}\right), \tag{4}$$

它把方程(1),(2)及(3)作为特例包括在内. 若设想有一个简单的动力系统, 它由沿 x 轴运动的单位质量质点组成, 且若 $f(x, dx/dt)$ 是作用于其上的力,则(4)是它的运动方程. x(位置)和 dx/dt(速度)的值, 刻划了这系统在任一时刻的状态,称为该系统的相,而变量 x 与 dx/dt 的平面则叫相平面. 若引入变量 $y=dx/dt$, 则(4)可换成一个等价的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=f(x,y).\end{cases} \tag{5}$$

我们将要看到,从研究(5)的解,可以获得不少关于(4)的解的性质. 当我们把 t 看作一个参量,则(5)的一个解一般是两个函数 $x(t)$及 $y(t)$,它们确定了 xy 平面上的一根曲线,而 xy 平面就是上面所说的相平面. 我们将研究这些曲线在相平面上所形成的整个图象.

更一般地，我们要研究下列形式的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x, y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=G(x, y),\end{cases}\tag{6}$$

这里 F 及 G 在整个平面上连续且具有连续的偏导数. 这类方程组，自变量 t 并不出现在右边的函数 F 及 G 里，称为**自治方程组**. 现在我们来进一步改变这些方程组的解.

从上述假定及定理 36-A 可知，若 t_0 是任一数而 (x_0, y_0) 是相平面的任一点，则存在(6)的唯一的解

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t),\end{cases}\tag{7}$$

使 $x(t_0)=x_0$ 及 $y(t_0)=y_0$. 若 $x(t)$ 及 $y(t)$ 不都是常数，则(7)确定相平面上的一根曲线，它叫方程组(6)的一个**路线**①. 若(7)是(6)的一个解，则

$$\begin{cases}x=x(t+c)\\y=y(t+c)\end{cases}\tag{8}$$

(其中 c 是任一常数)显然也是一个解. 所以每个路线可由许多解来代表，而这些解之间只相差参量的一个位移. 我们也容易证明(见习题 2)，过点 (x_0, y_0) 的任一路线必相应于(8)那种形式的一个解. 由此可知，过相平面上每一点的，至多有一个路线. 此外，当 t 增大时点在给定路线上的移动方向，对于代表该路线的所有解来说都是一样的. 所以一个路线是个**有向**曲线，在我们所画的图形里总是用箭头来表示 t 增大时路线描出的方向.

以上所讲，说明在一般情况下(6)的路线是铺满整个相平面的，而且不会彼此相交. 唯一的例外出现在使 F 及 G 都等于 0 的点 (x_0, y_0) 处：

$$F(x_0, y_0)=0 \text{ 及 } G(x_0, y_0)=0.$$

---

① 路线(path)，有的作者称为**轨线**(trajectory)或**特征线**(characteristic).

这些点叫做临界点，而在这样的一个点处，定理 36-A 所保证的唯一的解是常数解 $x=x_0$ 及 $y=y_0$。一个常数解不能确定一个路线，所以临界点是没有路线通过的。在本书中，我们总假定每个临界点 (x_0, y_0) 是孤立的，即是说，存在一个以 (x_0, y_0) 为中心为圆，其中不再含有别的临界点。

为得出临界点的一个物理意义，我们来考察从动力方程(4)得出的特殊自治方程(5)。这里临界点是个点 $(x_0, 0)$，在该处 $y=0$ 及 $f(x_0, 0)=0$；就是说，它相应于质点的这样一个运动状态，即速度 dx/dt 与加速度 $dy/dt=d^2x/dt^2$ 都等于 0 的状态。这表示质点是静止的，不受力的作用，因而处于平衡状态①。物理系统的平衡状态显然是其最重要的状态之一，这也是我们所以要研究临界点的原因之一。

一般的自治方程组(6)不一定是从(4)那种形式的任何动力方程产生出来的。那末这种情况下的路线和临界点又能有什么物理意义呢？这里我们莫如来考察图 41 及下式所定义的二维矢量场

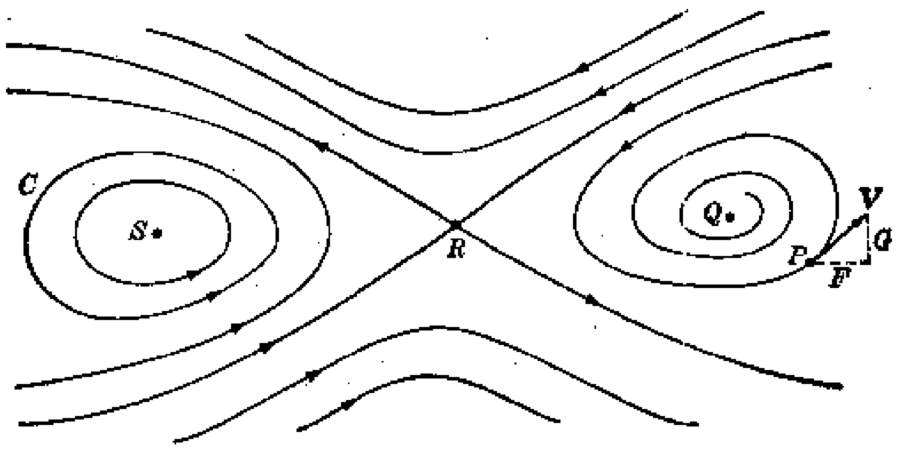


图 41

$$\mathbf{V}(x, y)=F(x, y)\mathbf{i}+G(x, y)\mathbf{j},$$

它在一典型点 $P(x, y)$ 处具有水平分量 $F(x, y)$ 及垂直分量 $G(x, y)$。由于 $dx/dt=F$ 及 $dy/dt=G$，故此矢量与路线相切于 P 且指向 t 增大的方向。若把 t 看作时间，则 $\mathbf{V}$ 可解释为沿着路线运动的一个质点的速

① 所以有的作者称它为平衡点而不称临界点。

度矢量. 我们也可以设想整个相平面上充满了质点, 在每条路线上有许多质点络绎不绝地运动着, 而且还伴随着邻近路线上的其它质点. 这种情况可以称作二维流体运动;而由于方程组(6)是自治的, 它表明一固定点(x, y)处的矢量$V(x, y)$并不随时间而改变, 故流体运动是稳恒的. 路线是动点的运动轨迹,而临界点Q, R, 及S则是0速度的点, 在该处的质点是静止的(流体运动中的滞点).

在图41所示的流体运动中,最突出的地方是:

a. 临界点;

b. 临界点附近的路线排列情况;

c. 临界点的稳定与否,就是说,靠近这临界点处的质点能保持在该点附近还是会飘移到平面上别的部分去;

d. 闭合的路线(如图中的C),它相应于周期解.

这些特点形成方程组(6)的相图的主要部分(路线的整体图象). 由于非线性方程及方程组一般不能求出显式解, 所以本章所讲定性理论的目的就是要直接从函数F及G,来发现关于相图的尽可能多的情况.为使读者对这类可能取得的情况有较深入的认识, 我们指出, 若$x(t)$是动力方程(4)的一个周期解, 那末它的导数$y(t)=dx/dt$也是周期的, 因而方程组(5)的相应路线是闭合的. 反之,若(5)有任一路线闭合,则(4)有一周期解. 作为这种思想的一个具体应用例子, 我们指出,对于范德波方程,它虽然不能解出,但可证明它的等价自治方程组具有唯一的闭合路线,从而肯定它有唯一的周期解(若$\mu>0$).

习　题

1. 试将牛顿第二运动定律用于摆坠以导出方程(2).
2. 设(x_0, y_0)为相平面上一点. 若$x_1(t)$, $y_1(t)$及$x_2(t)$, $y_2(t)$是(6)的这样两个解,使得对于合适的t_1及t_2有$x_1(t_1)=x_0$, $y_1(t_1)=y_0$及$x_2(t_2)=x_0$, $y_2(t_2)=y_0$,试证,存在一个常数c能使

$$x_1(t+c)=x_2(t) \qquad 及 \qquad y_1(t+c)=y_2(t).$$

3. 试述下列微分方程组的相图之间的关系:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=G(x,y)\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-F(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=-G(x,y).\end{cases}$$

4. 试述下列各方程组的相图的情况:

a. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=0\\ \dfrac{dy}{dt}=0;\end{cases}$

b. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\\ \dfrac{dy}{dt}=0;\end{cases}$

c. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=1\\ \dfrac{dy}{dt}=2;\end{cases}$

d. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x\\ \dfrac{dy}{dt}=-y.\end{cases}$

5. 今规定方程(4)的临界点及路线即其等价方程组(5)的临界点及路线. 试求方程(1),(2)及(3)的临界点.

6. 求下列方程的临界点:

a. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}-(x^3+x^2-2x)=0;$

b. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y^2-5x+6\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y.\end{cases}$

7. 试求非自治方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\\ \dfrac{dy}{dt}=x+e^t\end{cases}$$

的所有的解,并(在 xy 平面)画出这些解所确定的一些曲线。

41. 临界点的类型. 稳定性

我们来看自治方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x,y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=G(x,y).\end{cases}\tag{1}$$

我们通常假定函数 F 及 G 在整个 xy 平面上连续且具有连续的一阶偏导数. (1)的临界点可从求解联立方程 $F(x,y)=0$ 及 $G(x,y)=0$ 而得出(至少在原理上如此). 经常出现的临界点有四类简单情形, 本节目的就是要用附近路线的形状来说明这四类临界点. 但首先我们需要讲两个定义.

设(x_0,y_0)是(1)的一个孤立临界点. 若 $C=[x(t),\ y(t)]$是(1)的一个路线, 且若

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=x_0 \quad 及 \quad \lim_{t\to\infty}y(t)=y_0,\tag{2}$$

则说当 $t\to\infty$ 时 C **趋近于**(x_0,y_0)[①]. 这在几何上的意义是: 若$P=(x,y)$是根据方程 $x=x(t)$及 $y=y(t)$描出曲线C的点, 则当 $t\to\infty$ 时 $P\to(x_0,y_0)$. 若又知

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)-y_0}{x(t)-x_0}\tag{3}$$

存在, 或者, 若知(3)中的商在 $t\to\infty$ 时变为正无穷大或负无穷大, 我们就说 $t\to\infty$ 时C**进入**临界点. (3)中的商是点(x_0,y_0)与点$P[x(t),y(t)]$的连线的斜率, 所以这个新加的条件表明当 $t\to\infty$ 时该连线趋于一个确定的方向. 在以上的定义里, 也可以考察 $t\to-\infty$ 时的极限. 这些性质显然都是路线C的性质, 并不取决于代表路线的是哪个解.

有时可能求得方程组(1)的显式解, 于是这些解就可用来确定路

---

① 可以证明, 若对于某一个解 $x(t)$, $y(t)$, (2)成立, 则(x_0,y_0)必为一临界点. 参看 F. G. Tricomi《微分方程》("Differential Equations", p. 47. 1961).

线. 然而在大多数情形下, 为求路线, 必须从方程组的两个方程之间消去 t, 得出

$$\frac{dy}{dx}=\frac{G(x, y)}{F(x, y)}. \tag{4}$$

这个一阶方程给出了(1)的路线上点(x, y)处切线的斜率, 如果函数 F 及 G 在该点处不同时等于 0 的话. 因若 F 及 G 在该处都等于 0, 那个点当然就是临界点, 就不会有路线通过那里. 所以(1)的路线就是(4)的单参量积分曲线族, 而这族曲线常可用第二章所讲的方法求得. 但是应该指出, (1)的路线是有向的, 而(4)的积分曲线则并不带有方向. 确定路线的这两种方法, 底下都有例子加以说明.

现在我们用几何图形来描述主要的四类临界点. 在每种情况下假定所论临界点都是原点 $O=(0, 0)$.

节点. 象图 42 里的那样一个临界点叫节点. 当 $t\to\infty$ (或 $t\to-\infty$) 时, 每个路线都趋近并进入这样的一个点. 对于图 42 所示的节点来说, 我们有四个路线是由半直线组成的, 即 AO, BO, CO, 及 DO. 它们与原点一起形成直线 AB 及 CD. 所有其他的路线都类似一段抛物线, 并

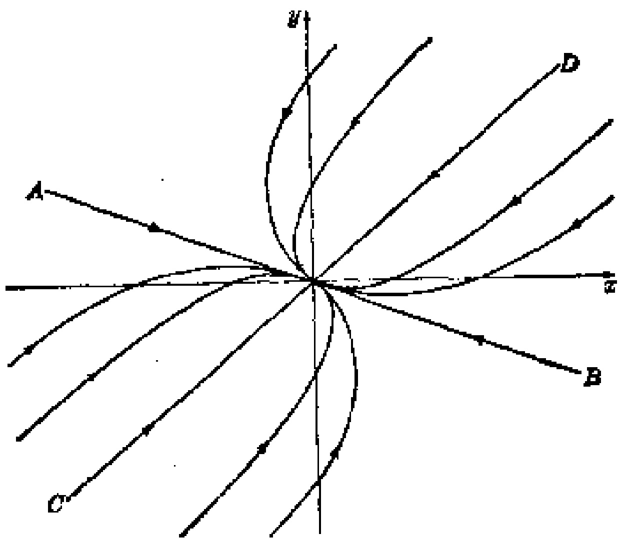


图 42

且当每个路线趋近 0 时它的斜率趋近直线 AB 的斜率.

例 1. 设有方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+2y.\end{cases} \tag{5}$$

原点显然是唯一的临界点，并且容易用第 38 节的方法求出通解：

$$\begin{cases}x=c_1e^t\\ y=c_1e^t+c_2e^{2t}.\end{cases} \tag{6}$$

当 $c_1=0$ 时，我们有 $x=0$ 及 $y=c_2e^{2t}$. 在这情形下(图 43)，$c_2>0$ 时的路线是正 y 轴而 $c_2<0$ 时的路线是负 y 轴，这两个路线在 $t\to-\infty$ 时都趋近并进入原点. 当 $c_2=0$ 时，我们有 $x=c_1e^t, y=c_1e^t$. 这路线在 $c_1>0$ 时是半直线 $y=x, x>0$，而在 $c_1<0$ 时是半直线 $y=x, x<0$，并且当 $t\to-\infty$ 时这两个路线也都趋近并进入原点. 当 c_1 及 c_2 都$\neq0$ 时，路线在抛物线 $y=x+(c_2/c_1^2)x^2$ 上，它通过原点，并在该处斜率为1. 应该知道这每个路线只不过是抛物线的一部分，若 $c_1>0$ 这是 $x>0$ 的那部分，若 $c_1<0$ 这是 $x<0$ 的那部分. 每个路线在 $t\to-\infty$ 时也都趋近并进入原点；这可以从 (6) 直接看出. 如果直接从(5)出发得出微分方程

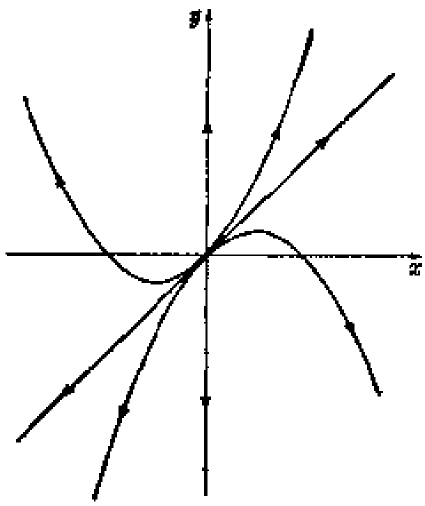


图 43

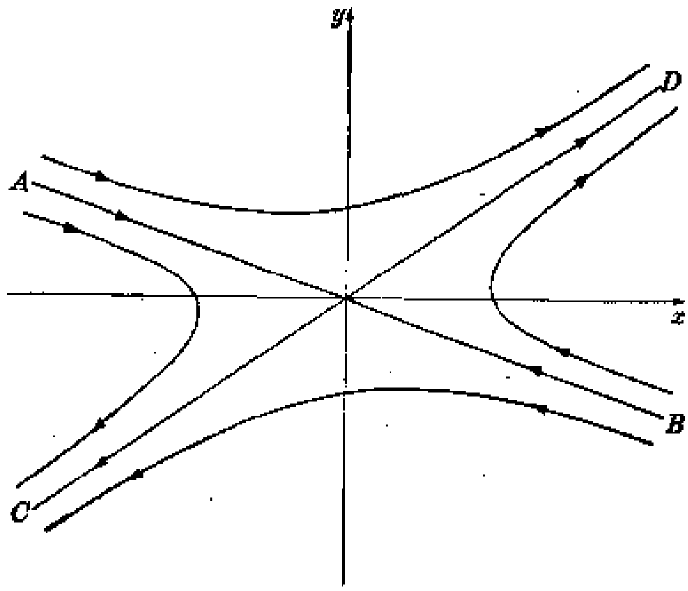


图 44

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+2y}{x},\tag{7}$$

它给出过(x, y)的那个路线的斜率的斜率[假定$(x, y)\neq(0, 0)$]，那末把(7)作为齐次方程求解，便得$y=x+cx^2$. 这个方法给出了路线所在的曲线(除了在y轴上的那两个路线之外)，但不能告诉我们路线是怎样描出的. 从上述讨论，显然可知方程组(5)的临界点(0, 0)是个节点.

鞍点. 象图 44 里那样的一个临界点叫鞍点. 当$t\to\infty$，它为半线形路线AO及BO所趋近并进入，而这两个路线都在直线AB上. 当$t\to-\infty$时它也为半线形路线CO及DO所趋近并进入，而这两个路线在另一直线CD上. 这四个半线形路线之间有四个域，每个域里含有一族类似双曲线的路线. 这些路线并不随$t\to\infty$或$t\to-\infty$趋近0，而是随着$t\to\infty$与$t\to-\infty$而渐近于这个或那个半线形路线.

中心点. 一个中心点(有时叫涡点)是四周有一族闭合路线的临界点. 当$t\to\infty$或$t\to-\infty$时它并不为任何一个路线所趋近.

例 2. 方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x\end{cases}\tag{8}$$

以原点为其唯一临界点，它的通解是

$$\begin{cases}x=-c_1\sin t+c_2\cos t\\ y=c_1\cos t+c_2\sin t.\end{cases}\tag{9}$$

满足条件$x(0)=1$及$y(0)=0$的解显然是

$$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t;\end{cases}\tag{10}$$

而由条件$x(0)=0$及$y(0)=-1$所确定的解是

$$\begin{cases}x=\sin t=\cos\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\\[2mm] y=-\cos t=\sin\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right).\end{cases}\tag{11}$$

这两个不同的解规定同一个路线 C(图 45), 它显然就是圆 $x^2+y^2=1$. (10)及(11)都说明这个路线是以反时针方向指出的. 若在方程组里消

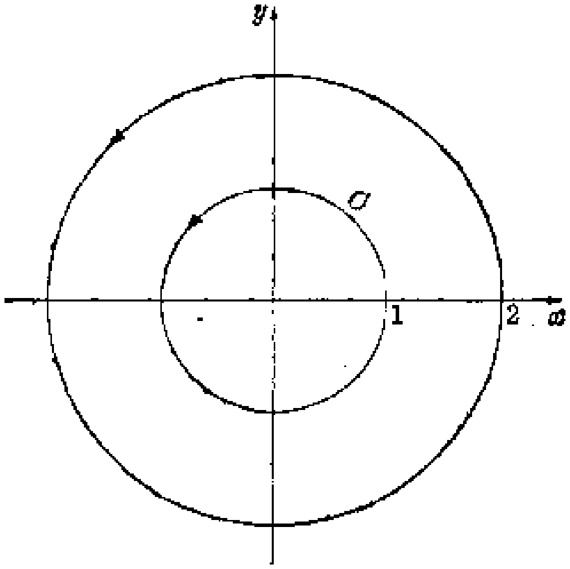


图 45

去 t, 则得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},$$

它的通解 $x^2+y^2=c^2$ 给出所有的路线(但不带它们的方向). 所以方程组(8)的临界点(0, 0)显然是个中心点.

螺旋点. 像图 46 里那样的一个临界点叫螺旋点 (有时叫焦点). 这样

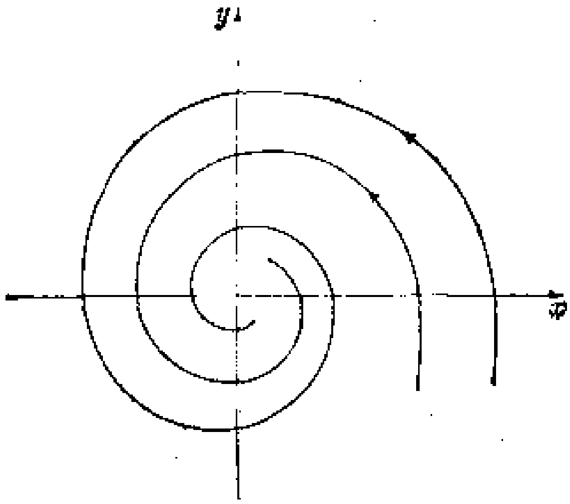


图 46

的一点被一族路线的螺旋方式趋近。并且当 $t\to\infty$（或当 $t\to-\infty$）时这族路线绕螺旋点无穷多次．特别要注意的是，这些路线虽趋近 0 但并不进入 0．就是说，当点 P 在 $t\to\infty$（或 $t\to-\infty$）时沿着这样一个路线趋近 0 时，直线 OP 却并不趋近任何确定的方向．

例 3. 若 a 是一任意常数，则方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax-y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x+ay\end{cases}\tag{12}$$

以原点为其唯一临界点（何故？）．其路线的微分方程是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+ay}{ax-y},\tag{13}$$

它的最容易的解法是引入由 $x=r\cos\theta$ 及 $y=r\sin\theta$ 所规定的极坐标 r 与 θ．由于

$$r^2=x^2+y^2\ \text{及}\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x},$$

故有

$$r\frac{dr}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}\ \text{及}\ r^2\frac{d\theta}{dx}=x\frac{dy}{dx}-y.$$

用这两个方程，就可把(13)写成很简单的形式

$$\frac{dr}{d\theta}=ar,$$

故

$$r=ce^{a\theta}\tag{14}$$

是路线的极坐标方程．图 47 画出了这一螺线的两种可能的形状，而这两个路线的描绘方向可由 $x=0$ 时 $dx/dt=-y$ 这一事实看出．若 $a=0$，则(12)简化为(8)，于是(14)变成 $r=c$，这是以原点为中心的所有圆族 $x^2+y^2=r^2$ 的极坐标方程．所以这个例题是例 2 的一般情形，而由于图 45 里的中心点位于图 47 的两批螺线间的边界线上，故中心点式的

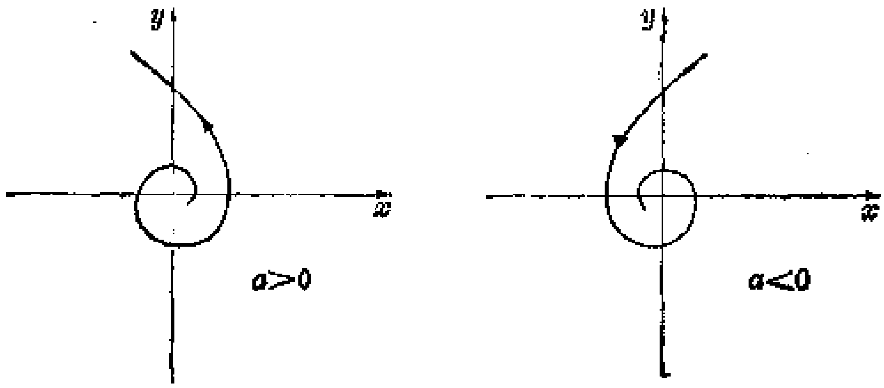


图 47

临界点常称为边界线情形. 下一节里我们还要碰到其他一些边界线情形.

现在对于方程组(1)的临界点引入稳定性概念.

上节中指出, 研究物理系统时, 最重要的状态之一是它的稳定状态. 然而一个稳定状态如果没有一相当程度的持久性, 就是说除非它是稳恒状态, 那它就没有多少物理意义. 举一个简单的例子, 我们来考察图 48 的摆. 这里有两个可能的稳定状态: 当摆锤静止在最高点处, 以及当摆锤静止在最低点处. 第一个状态显然不是稳定的, 而第二个则是稳定的. 现在我们知道一个简单物理系统的一个稳定状态相当于相平面上的一个平衡点(或临界点). 这些事实以一般的方式告诉我们:

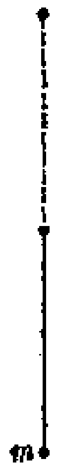


图 48

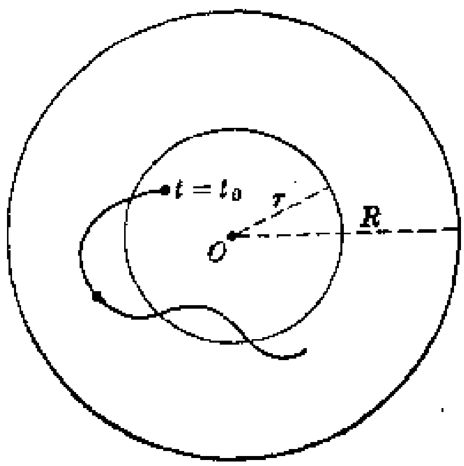


图 49

在一个非稳定平衡点处的小扰动，能使系统越来越大地偏离这个点，而在稳定的平衡点处情形则相反.

现在我们用更精确的方式来叙述这些直观思想. 我们考察系统(1)的一个孤立临界点，并且为了讨论方便起见假定这个点在相平面的原点 $O=(0,0)$处. 我们说这个临界点是稳定的，如果对于每个正数 R，存在另一正数 $r\leqslant R$，使得在某个 $t=t_0$ 时位于圆 $x^2+y^2=r^2$ 内的每个路线，在所有 $t>t_0$ 时都保持在圆 $x^2+y^2=R^2$ 内(图 49). 粗略地说，一个临界点是稳定的，如果所有点能接近于该点的路线能保持靠近该点. 又，我们说一个临界点是渐近稳定的，如果它是稳定的，并且存在一圆 $x^2+y^2=r_0^2$，使在某时 $t=t_0$ 位于该圆内的每个路线，在 $t\to\infty$ 时趋近原点. 最后，若所述临界点不是稳定的，则说它是非稳定的.

作为说明这些概念的例子，我们指出，图 43 中的节点，图 44 中的鞍点，以及图 47 中左边的螺旋点是非稳定的，而图 45 中的中心点是稳定的但并不是渐近稳定的. 图 42 中的节点，图 46 中的螺旋点，以及图 47 中右边的螺旋点是渐近稳定的.

习　题

1. 对于下列每个非线性方程组：(i) 求临界点；(ii) 求路线的微分方程；(iii) 试解该方程以求路线；(iv) 画出几个路线的草图并指出与 t 的增大相应的方向.

a. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y(x^2+1)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=2xy^2;\end{cases}$

b. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y(x^2+1)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x(x^2+1);\end{cases}$

c. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=e^y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=e^y\cos x;\end{cases}$

d. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x\\ \dfrac{dy}{dt}=2x^2y^2.\end{cases}$

2. 下列每个线性方程组以原点为一孤立临界点. (i) 求通解. (ii) 求路线的微分方程. (iii)解(ii)中所得出的方程, 画出几个路线的草图并指出相应于 t 增大的方向. (iv) 讨论临界点的稳定性如何.

a. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\\ \dfrac{dy}{dt}=-y\end{cases}$

b. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x\\ \dfrac{dy}{dt}=-2y\end{cases}$

c. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x\end{cases}$

3. 大致画出方程 $d^2x/dt^2=2x^3$ 的相图, 并证它在原点处有一非稳定的孤立临界点.

42. 线性方程组的临界点与稳定性

本章目的是通过对形如

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x, y)\\ \dfrac{dy}{dt}=G(x, y)\end{cases}$$

的非线性自治方程组的相图的研究, 以求得关于非线性微分方程的尽可能多的知识. 这项工作的一个方面, 是如何把这种方程组的临界点按其本质和稳定性来进行分类的问题. 我们将在第 44 节中看到, 在合适的条件下, 对于给定的非线性方程组, 只要通过研究有关的线性方程组, 这个问题是可以解决的. 因此本节专门对线性自治方程组的临界点进行全面的分析.

考察方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1x+b_1y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=a_2x+b_2y,\end{cases}\tag{1}$$

它显然以原点(0, 0)为一临界点. 在本节中, 我们总假定

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0,\tag{2}$$

故(0, 0)是唯一的临界点. 在第38节中已证明, (1)具有形式为

$$\begin{cases}x=Ae^{mt}\\ y=Be^{mt}\end{cases}$$

的非平凡解, 如果m是下列二次方程的根:

$$m^2-(a_1+b_2)m+(a_1b_2-a_2b_1)=0,\tag{3}$$

它叫所给方程组的**辅助方程**. 注意由(2)可知0不能为(3)的一个根.

设m_1及m_2是(3)的根. 我们将证明, 方程组(1)的临界点(0, 0)的性质可由数m_1及m_2的性质确定. 这里我们自然可以料想会出现三种可能的情形, 即根据m_1及m_2是不同的实根, 相等的实根或共轭复根而引起的三种情形. 遗憾的是实际情况比这还要稍稍复杂一些, 因为我们必须考察五种情形, 分述如下:

主要情形

情形 A. 根m_1及m_2是不同的实数, 但正负相同(节点);

情形 B. 根m_1及m_2是不同的实数, 但正负相反(鞍点);

情形 C. 根m_1及m_2是共轭复数, 但非纯虚数(螺旋点).

交界情形

情形 D. 根m_1及m_2是相等的实数(节点);

情形 E. 根m_1及m_2是纯虚数(中心点).

之所以要区分主要情形和交界情形, 其理由到第44节就会清楚. 目前只要指出一点就足够: 交界情形虽在数学上有意义, 但在应用上意义

很少，因为用以确定它们的条件在物理问题中不太可能出现。现在我们来证明括弧里所指出的事实.

情形 A. 若根 m_1 及 m_2 是不同的实数，但正负相同，则临界点(0, 0)是一节点.

证明. 先假定 m_1 及 m_2 都是负数，并这样选取记号，以使 $m_1<m_2<0$. 根据第 38 节，在这情形下，(1)的通解是

$$\begin{aligned} x&=c_1A_1e^{m_1t}+c_2A_2e^{m_2t}\\ y&=c_1B_1e^{m_1t}+c_2B_2e^{m_2t}, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 A_i 及 $B_i(i=1,2)$ 是一些确定的常数，使 $B_1/A_1\neq B_2/A_2$，而 c_i 则是任意常数. 当 $c_2=0$ 时，我们得到解

$$\begin{cases} x=c_1A_1e^{m_1t}\\ y=c_1B_1e^{m_1t}, \end{cases} \tag{5}$$

当 $c_1=0$ 时，我们得到解

$$\begin{cases} x=c_2A_2e^{m_2t}\\ y=c_2B_2e^{m_2t}. \end{cases} \tag{6}$$

对任一$c_1>0$，解(5)所表示的路线由半直线 $A_1y=B_1x$ 组成，其斜率为 B_1/A_1；对任一$c_1<0$，它所表示的路线由这直线的另外半根(原点另一侧的半直线)组成. 因 $m_1<0$，故当 $t\to\infty$ 时这两个半直线路线都趋近(0, 0)；又因 $y/x=B_1/A_1$，故两者都以斜率 B_1/A_1 进入(0, 0)(图 50). 同样，解(6)代表直线 $A_2y=B_2x$(其斜率为 B_2/A_2)上的两个半直线. 这两个路线在 $t\to\infty$ 时也趋近(0, 0)且以斜率 B_2/A_2 进入该点.

若 $c_1\neq0$ 且 $c_2\neq0$，则通解(4)代表弯曲的路线. 因 $m_1<0$，且 $m_2<0$，这两个路线在 $t\to\infty$ 时也趋近(0, 0). 其次，因 $m_1-m_2<0$ 且

$$\frac{y}{x}=\frac{c_1B_1e^{m_1t}+c_2B_2e^{m_2t}}{c_1A_1e^{m_1t}+c_2A_2e^{m_2t}}=\frac{(c_1B_1/c_2)e^{(m_1-m_2)t}+B_2}{(c_1A_1/c_2)e^{(m_1-m_2)t}+A_2},$$

故当 $t\to\infty$ 时显然有 $y/x\to B_2/A_2$，因而所有这些路线都以斜率 B_2/A_2 进入(0, 0). 图 50 画出了这一情形的大体状况. 这个临界点显然是节点，而且它是渐近稳定的.

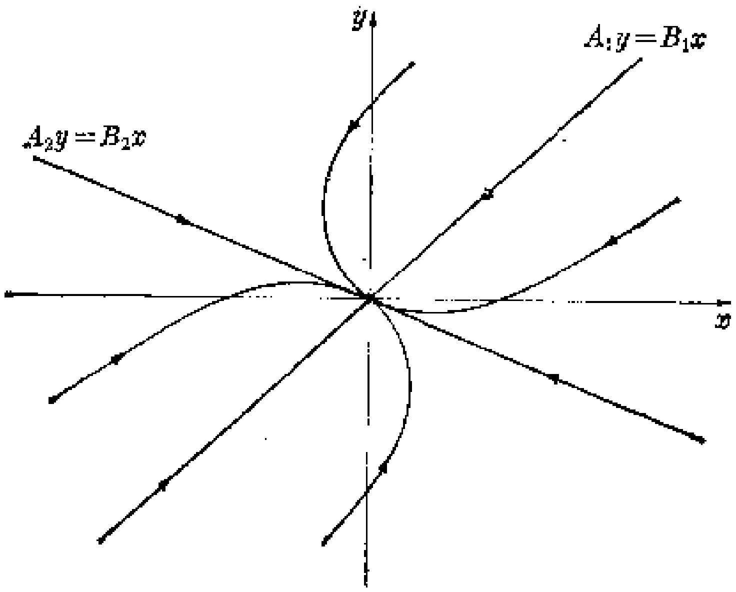


图　50

若 m_1 及 m_2 都为正，且若选取记号时使 $m_1>m_2>0$，则情况与前完全相同，只不过这里所有路线是在 $t\to-\infty$ 时趋近并进入(0,0)的．图 50 给出的路线图也不变，只是表示其方向的所有箭头都与前相反．临界点仍是个节点，但它是非稳定的．

情形 B. 若根 m_1 及 m_2 是不同实数且正负相反，则临界点(0,0)是个鞍点．

证明．选取根的记号时可使 $m_1<0<m_2$．(1)的通解仍可写成(4)的形式，并且仍有(5)及(6)那种形式的特解．(5)所代表的两个半直线式的路线在 $t\to\infty$ 时仍趋近并进入(0,0)，但这时(6)所代表的两半直线路线是在 $t\to-\infty$ 时趋近并进入(0,0)的．若 $c_1\neq0$ 且 $c_2\neq0$，(4)的通解仍代表弯曲的路线，但由于 $m_1<0<m_2$，这些路线在 $t\to\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时都不趋近 (0,0)．而是，当 $t\to\infty$ 时，这些路线中的每一路线，都以 (6) 所代表的一个半直线为其渐近线；且当 $t\to-\infty$ 时，每个路线都以(5) 所代表的一个半直线为其渐近线．图 51 画出了这种性态的大致情形．这时的临界点是个鞍点，它显然是非稳定的．

情形 C. 若根 m_1 及 m_2 是共轭复数而非纯虚数，则临界点(0,0)是一螺旋点．

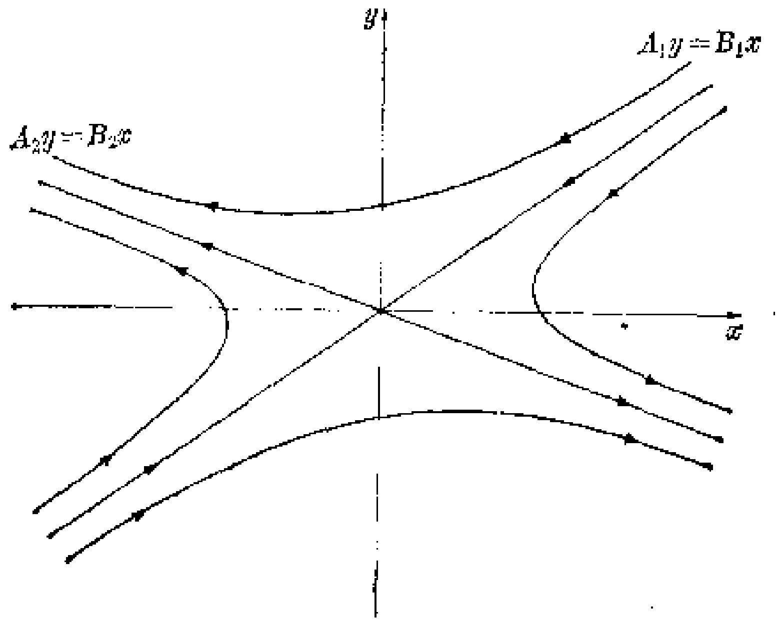


图 51

证明. 这时可把 m_1 及 m_2 写为 $a\pm ib$, 其中 a 及 b 为非 0 实数. 又, 为了以后要用, 这里先指出方程(3)的判别式 D 是负的:

$$\begin{aligned} D &= (a_1+b_2)^2-4(a_1b_2-a_2b_1) \\ &= (a_1-b_2)^2+4a_2b_1<0. \end{aligned} \tag{7}$$

由第 38 节, 可知这时(1)的通解是

$$\begin{cases} x=e^{at}[c_1(A_1\cos bt-A_2\sin bt)+c_2(A_1\sin bt+A_2\cos bt)] \\ y=e^{at}[c_1(B_1\cos bt-B_2\sin bt)+c_2(B_1\sin bt+B_2\cos bt)], \end{cases} \tag{8}$$

其中 A_i 及 $B_i(i=1,2)$ 是确定的常数, 而 c_i 则是任意常数.

先假设 $a<0$. 于是由公式(8)显见当 $t\to\infty$ 时 $x\to0$ 且 $y\to0$, 故当 $t\to\infty$ 时所有路线趋近(0, 0). 现在来证明这些路线在 $t\to\infty$ 时并不进入点(0, 0), 而是象螺旋线式地缠绕着它. 为此可引用极坐标 θ 并证明沿任一路线, $d\theta/dt$ 对于所有 t 或者都为正或者都为负. 先从 $\theta=\tan^{-1}(y/x)$ 这一事实出发, 得

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{x\,dy/dt-y\,dx/dt}{x^2+y^2},$$

于是利用方程(1)得到

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{a_2x^2+(b_2-a_1)xy-b_1y^2}{x^2+y^2}. \tag{9}$$

由于我们只注意那些代表路线的解，故可设 $x^2+y^2\neq0$. 但由(7)可知 a_2 及 b_1 应为异号. 我们来考察 $a_2>0$ 而 $b_1<0$ 的情形. 当 $y=0$ 时，从(9)得出 $d\theta/dt=a_2>0$. 若 $y\neq0, d\theta/dt$ 不能为 0；因若它是 0，则自(9)应有

$$a_2x^2+(b_2-a_1)xy-b_1y^2=0,$$

亦即对于某一实数 x/y 应有

$$a_2\left(\frac{x}{y}\right)^2+(b_2-a_1)\frac{x}{y}-b_1=0, \tag{10}$$

而这不可能，因二次方程(10)的判别式 D 根据(7)是负的. 这说明当 $a_2>0$ 时 $d\theta/dt$ 总是正的，同样，可知当 $a_2<0$ 时它总是负的. 由于(8)告诉我们当 $t\to\infty$ 时 x 及 y 变号无穷多次，故所有路线必以螺旋方式卷向原点（按 $a_2>0$ 或 $a_2<0$ 而取逆时针或顺时针方向）. 所以这情形下的临界点是一螺旋点，并且它是渐近稳定的.

若 $a>0$，情况仍如前，只不过其中的路线是在 $t\to-\infty$ 时趋近(0, 0）的，从而临界点是非稳定的. 图 47 里表明了 $a_2>0$ 时的路线分布情况.

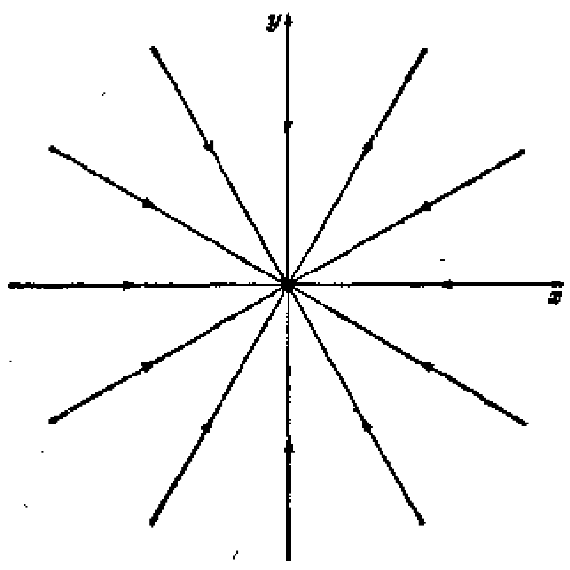


图 52

情形D. 若根 m_1 及 m_2 是相等的实数，则临界点(0, 0)是个节点.

证明. 先假定 $m_1=m_2=m<0$. 在这之下还可再分为两个情形需要分别予以讨论：(i) $a_1=b_2\neq 0$ 而 $a_2=b_1=0$；(ii)所有其他使方程(3)具有一个重根的一切可能情形.

先考察这里的情形(i)，这就是283页脚注里所描述的那种情形. 若把 a_1 及 b_2 的公共值记为 a，则方程(3)变为 $m^2-2am+a^2=0$，于是 $m=a$. 这时方程组(1)成为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=ay\end{cases}$$

它的通解是

$$\begin{cases}x=c_1e^{mt}\\ y=c_2e^{mt},\end{cases}\tag{11}$$

其中 c_1 及 c_2 是任意常数. (11) 所确定的路线是具有一切可能斜率的半直线(图52)，而由于 $m<0$，故每个路线随着 $t\to\infty$ 而趋近并进入(0, 0). 所以临界点是个节点，并且是渐近稳定的. 若 $m>0$，情况仍如前，但路线是在 $t\to-\infty$ 时进入(0, 0)的，这时图52中的箭头都要倒过来，于是(0, 0)是非稳定的.

现在我们来讨论情形(ii). 根据公式38-(20)以及习题38-4，(1)的通解可写为

$$\begin{aligned}x&=c_1Ae^{mt}+c_2(A_1+At)e^{mt}\\ y&=c_1Be^{mt}+c_2(B_1+Bt)e^{mt},\end{aligned}\tag{12}$$

其中 A 及 A_1 以及 B 及 B_1 是一些确定的常数，而 c_1 及 c_2 是任意常数. 当 $c_2=0$ 时，我们得到解

$$\begin{cases}x=c_1Ae^{mt}\\ y=c_1Be^{mt}.\end{cases}\tag{13}$$

我们知道这些解代表直线 $Ay=Bx$ (斜率为 B/A) 上的两个半直线路线，

而由于 $m<0$，故两个路线随着 $t\to\infty$ 而趋近 $(0,0)$（图 53）．又因 $y/x=B/A$，故两个路线都以斜率 B/A 进入 $(0,0)$．若 $c_2\neq0$，解(12)代表弯曲的路线，而由于 $m<0$，故从(12)显然知道这种路线随着 $t\to\infty$ 而趋近 $(0,0)$．又，由

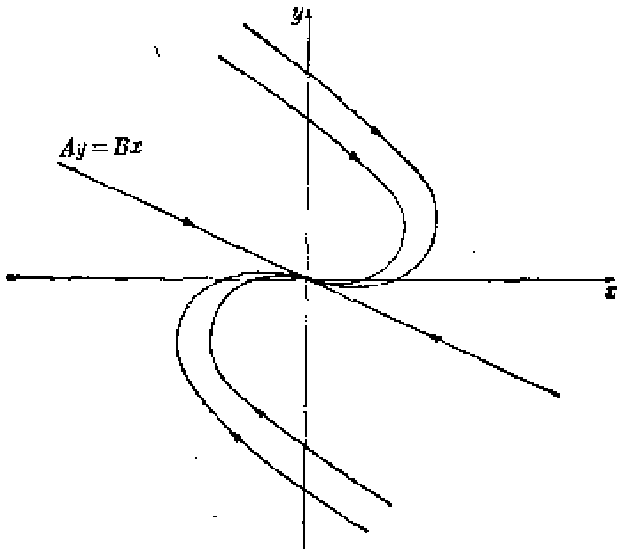


图　53

$$\frac{y}{x}=\frac{c_1Be^{mt}+c_2(B_1+Bt)e^{mt}}{c_1Ae^{mt}+c_2(A_1+At)e^{mt}}=\frac{c_1B/c_2+B_1+Bt}{c_1A/c_2+A_1+At},$$

可知当 $t\to\infty$ 时 $y/x\to B/A$，故这种弯曲路线都以斜率 B/A 进入 $(0,0)$．我们又看到当 $t\to-\infty$ 时 $y/x\to B/A$．图 53 画出了这些路线的大致分布情况．这里 $(0,0)$ 显然是个渐近稳定的节点．若 $m>0$，情况仍不变，不过路线的方向要倒过来，且临界点是非稳定的．

情形 E. 若根 m_1 及 m_2 是纯虚数，则临界点 $(0,0)$ 是个中心点．

证明．这里只要引用情形 C 的讨论就可以了，因为现在 m_1 及 m_2 不过是 $a\pm ib$ 的形式中 $a=0$ 而 $b\neq0$ 的情形．所以(1)的通解由(8)给出，但没有指数函数因子，从而 $x(t)$ 及 $y(t)$ 是周期函数，于是每个路线是环绕原点的闭曲线．如图 54 所示意的，这些曲线实际上是椭圆；这只要解出路线的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_2x+b_2y}{a_1x+a_1y}\tag{14}$$

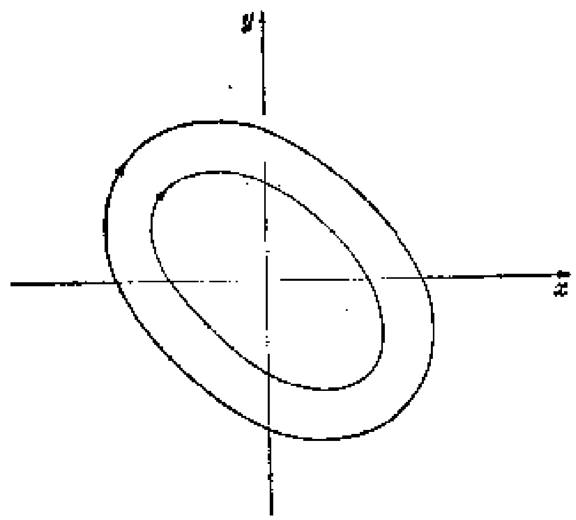


图 54

就可得到证明(见习题 5). 这里的临界点(0, 0)显然是个中心, 它是稳定的, 但不是渐近稳定的.

在以上的讨论中, 我们讲述了关于稳定性的一些材料. 现在可把这些材料总结如下.

定理A. 线性方程组(1)的临界点(0, 0)是稳定的, 当且仅当辅助方程(3)的两个根具有非正的实部; 这个临界点是渐近稳定的, 当且仅当这两个根具有负的实部.

现若把方程(3)写成

$$(m-m_1)(m-m_2)=m^2+pm+q=0 \tag{15}$$

的形式, 从而 $p=-(m_1+m_2)$ 及 $q=m_1m_2$, 则上述五种情形照样可用系数 p 及 q 来讨论, 同用根 m_1 及 m_2 来讨论一样方便. 事实上, 若利用 pq 平面来说明这些情形, 那就能得出一个醒目的图, (图 55), 使我们能对临界点(0, 0)的本质、稳定性等一目了然. 第一件事要指出的是 p 轴 $q=0$ 应予排除, 因为根据条件(2)我们知道 $m_1m_2\neq 0$. 根据我们从五种情形所获悉的知识, 图中所含的全部材料都可直接从以下的事实推出:

$$m_1,\ m_2=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

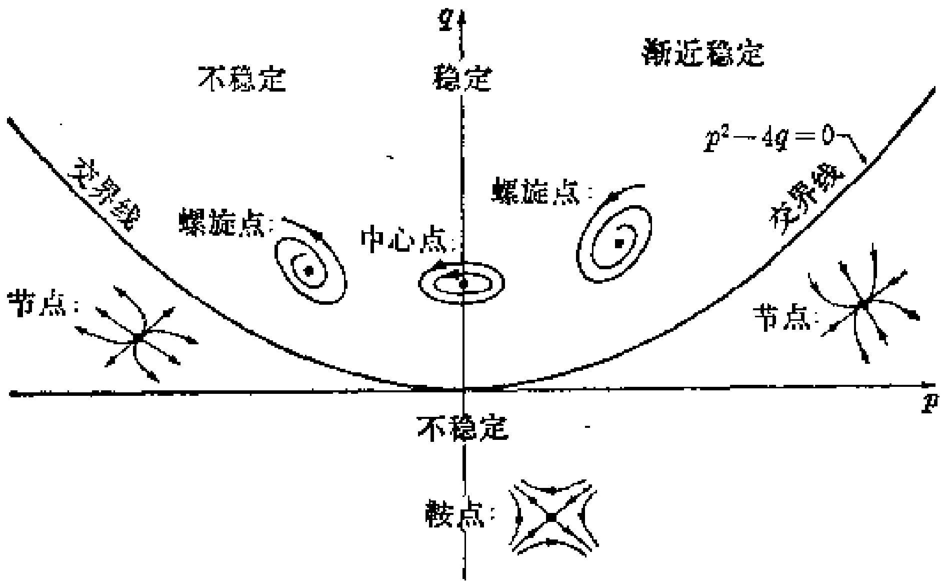


图　55

这样，在抛物线 $p^2-4q=0$ 以上部分，我们有 $p^2-4q<0$，故 m_1 及 m_2 是共轭复数，而它们只有在 $p=0$ 时是纯虚数；这些是情形C和情形E，包含螺旋点及中心点．在 p 轴以下我们有 $q<0$，这表明 m_1 及 m_2 是不同的实根且正负相反；这就得出情形B时的鞍点．最后，在这两个区域之间的地带(包括抛物线但除去 p 轴)，那里的情况由关系式 $p^2-4q\geqslant 0$ 及 $q>0$ 所刻划，故 m_1 及 m_2 是正负相同的实数；这时我们有情形A及D时的节点．此外，具有渐近稳定性的恰好有一个区域，那就是第一象限．我们把这结果正式陈述如下．

定理B． 线性方程组(1)的临界点(0, 0)是渐近稳恒的，当且仅当辅助方程(3)的系数 $p=-(a_1+b_1)$ 及 $q=a_1b_2-a_2b_1$ 都是正数．

最后应该强调指出，以上是通过分析线性方程组的显式解，来研究它的路线在临界点附近的情况．在以下两节里，我们对非线性方程组(它们一般不能求出显式解)来考察类似的问题，以便更全面地接触这个问题的精神实质．

习　题

1．就下列线性自治方程组的临界点(0, 0)，试确定其性质及稳定性：

a. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x\\ \dfrac{dy}{dt}=3y;\end{cases}$　　b. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-2y\\ \dfrac{dy}{dt}=4x-5y;\end{cases}$

c. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x+4y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+3y;\end{cases}$　　d. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=-17x-5y;\end{cases}$

e. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-4x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y;\end{cases}$　　f. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-3y\\ \dfrac{dy}{dt}=8x-6y;\end{cases}$

g. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-2y\\ \dfrac{dy}{dt}=5x+2y.\end{cases}$

2. 若 $a_1b_2-a_2b_1=0$，试证方程组(1)具有无穷多临界点，其中没有一个是孤立的.

3. a. 若 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，试证方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1x+b_1y+c_1\\ \dfrac{dy}{dt}=a_2x+b_2y+c_2\end{cases}$$

具有单独一个孤立临界点 (x_0, y_0).

b. 试证(a)中的方程组经变量置换 $\bar{x}=x-x_0$ 及 $\bar{y}=y-y_0$ 后可化为(1)的形式.

c. 求方程组

$$\frac{dx}{dt}=2x-2y+10$$

$$\frac{dy}{dt}=11x-8y+49$$

的临界点，作变量置换把这方程组写成(1)的形式，并确定临界点的性质及稳定性.

4. 在第 20 节里研究装在弹簧上质量作自由振动时，我们解微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+a^2x=0,$$

其中 $b\geqslant 0$ 及 $a>0$ 是分别表示媒质滞性及弹簧强度的常数. 今考察等价的自治方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=-a^2x-2by,\end{cases} \tag{*}$$

它只有一个临界点(0, 0).

a. 求(*)的辅助方程. 它的 p 和 q 是什么?

b. 对下列四种情形说明临界点的性质及稳定性，并对质量的相应运动作出简单的物理解释:

i. $b=0$; ii. $0<b<a$;

iii. $b=a$; iv. $b>a$.

5. 试在情形 E 中的假定下解方程(14)，并证明所得结果是原点四周的单参量椭圆族. 提示: 利用下列事实，若 $Ax^2+Bxy+Cy^2=D$ 是个实曲线的方程，则曲线为椭圆，当且仅当判别式 B^2-4AC 为负.

43. 用李亚普诺夫直接方法研究稳定性

若一物理系统的总能量在某平衡点处具有一局部极小值，那末从直观上显然可以认为该点是稳定的. 李亚普诺夫① 把这一思想推广成一种简单然而有效的方法，以研究更广泛的一类稳定性问题. 在本节及下节里，我们将讨论李亚普诺夫方法及其一些应用.

考察一自治方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt}=G(x, y),\end{cases} \tag{1}$$

并设它有一孤立临界点(0, 0)②. 令 $C[x(t), y(t)]$是(1)的一个路线，并设有一函数 $E(x, y)$，它在包含该路线的一个域上连续且具有连续的

① 李亚普诺夫(А. М. Ляпунов, 1857-1918)是俄国数学家及机械工程师，是写出不朽博士论文的罕见奇材. 该文于 1892 年用俄文发表(见 А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950; 或见秦元勋编著，运动稳定性理论一般问题讲义，科学出版社，1958.)

② 一个临界点(x_0, y_0)总可通过简单的坐标平移 $\bar{x}=x-x_0$ 及 $\bar{y}=y-y_0$ 移到原点处，所以我们一开头就可假定临界点在原点处而无损于一般性.

一阶偏导数. 若一点(x,y)根据方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$沿路线移动, 则$E(x,y)$可以看作是C上t的函数[这个函数我们记为$E(t)$], 它的变化率是

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial E}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial E}{\partial x}F+\frac{\partial E}{\partial y}G. \tag{2}$$

这个公式是李亚普诺夫思想的核心部分, 而为了要利用这公式, 我们需要讲几个定义, 以规定我们将要研究的几类函数.

设$E(x,y)$在包含原点的某个域上连续且具有连续的一阶偏导数. 若E在原点处等于0, 即$E(0,0)=0$, 则在$(x,y)\neq(0,0)$时若有$E(x,y)>0$, 便说它是**正定的**; 若在$(x,y)\neq(0,0)$时有$E(x,y)<0$, 便说它是**负定的**. 同样, 若$E(0,0)=0$且对于$(x,y)\neq(0,0)$有$E(x,y)\geqslant 0$, 便说E是**半正定的**, 而若$E(0,0)=0$且对于$(x,y)\neq(0,0)$有$E(x,y)\leqslant 0$, 便说它是**半负定的**. 形如$ax^{2m}+by^{2n}$的函数 (其中a及b为正的常数而m及n为正整数) 显然是正定的. 由于$E(x,y)$是负定的, 当且仅当$-E(x,y)$为正定, 故形如$ax^{2m}+by^{2n}$的函数取其$a<0$及$b<0$便是负定的. 函数x^{2m}, y^{2m}以及$(x-y)^{2m}$不是正定的, 但它们是半正定的. 若$E(x,y)$为正定, 则$z=E(x,y)$可看作是这样一块曲面(图 56)的方程, 它象个抛物面, 口朝上, 在原点处与xy平面相切.

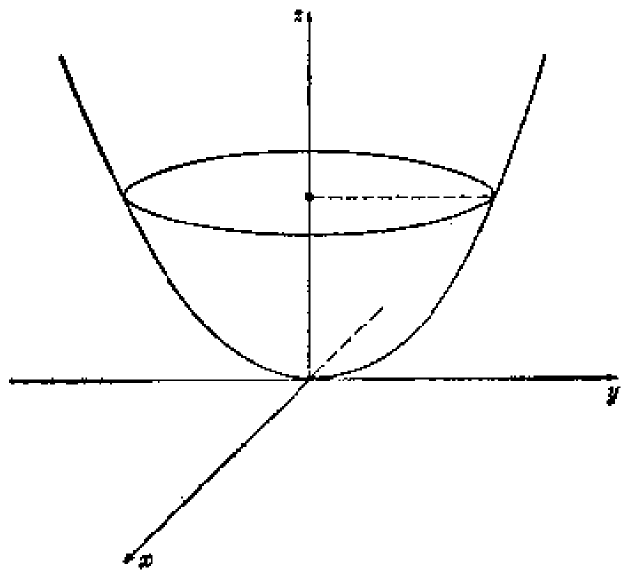


图 56

一个正定函数 $E(x, y)$，它能使

$$\frac{\partial E}{\partial x}F+\frac{\partial E}{\partial y}G \tag{3}$$

为半负定的，叫做方程组(1)的一个李亚普诺夫函数．根据公式(2)，(3)为半负定这一条件相当于在原点附近沿(1)的路线上有 $dE/dt\leqslant 0$（因而 E 是不增大的）．这些函数是对物理系统的总能量这个概念的推广．它们对稳定性问题的关系和用处从下面的定理(这是李亚普诺夫的基本发现)可以清楚看出．

定理A 若方程组(1)具有李亚普诺夫函数 $E(x, y)$，则其临界点(0, 0)是稳定的．又若这函数还具有能使函数(3)为负定的性质，则临界点(0, 0)是渐近稳定的．

证明．设 C_1 是心在原点半径为 $R>0$ 的圆(图 57)，又设 C_1 足够小，能完全容纳在函数 E 的定义域里．由于 $E(x, y)$ 连续而且是正定的，它在 C_1 上有一正的极小值 m．其次，因 $E(x, y)$ 在原点连续且在该处为 0，故可找出一正数 $r<R$，使 (x, y) 位于半径为 r 的圆 C_2 内时 $E(x, y)<m$．现设 $C=[x(t), y(t)]$ 是 $t=t_0$ 时位于 C_2 内的任一路线．于是 $E(t_0)<m$，又因(3)是半负定的，故有 $dE/dt\leqslant 0$，由此可知对于一切

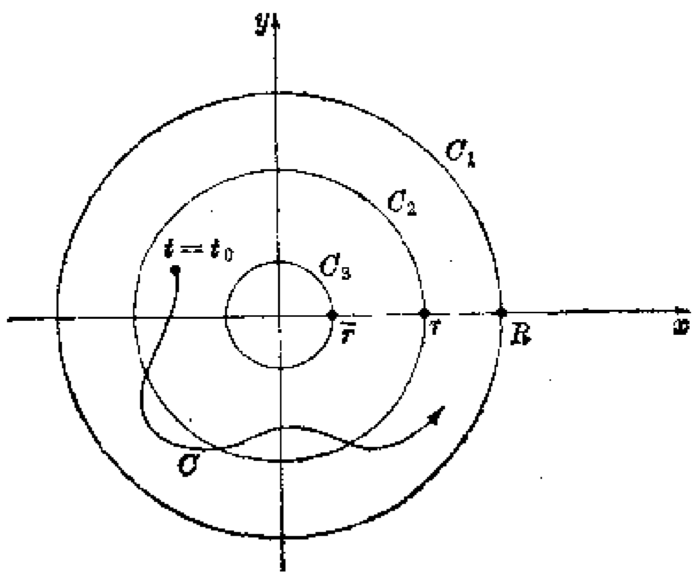


图 57

$t>t_0$ 有 $E(t)\leqslant E(t_0)<m$. 因此对于任何 $t>t_0$, 路线 C 决不会到达圆 C_1, 我们就有稳定性.

为证明定理的第二部分，就只要证明在新作的假设下我们还有 $E(t)\to 0$, 因由于 $E(x,y)$ 是正定的，这就意味着路线 C 会趋近临界点 $(0,0)$. 我们先指出，由于 $dE/dt<0$, 故知 $E(t)$ 为减函数；而根据假设 $E(t)$ 以 0 为下界，故可断言当 $t\to\infty$ 时 $E(t)$ 趋于某一极限 $L\geqslant 0$. 为证 $E(t)\to 0$, 我们只要证明 $L=0$, 因此可设 $L>0$ 并由此推出矛盾即可. 取一正数 $\bar{r}<r$, 使 (x,y) 位于半径 $\bar{r}$ 的圆 C_3 内时，就能有 $E(x,y)<L$. 由于函数(3)连续且是负定的，所以它在圆 C_1 及 C_3 上以及两者之间的环形域上有一负极大值 $-k$. 这个环形域包含 $t\geqslant t_0$ 时的全部路线 C, 故自方程

$$E(t)=E(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{dE}{dt}dt$$

可知不等式

$$E(t)\leqslant E(t_0)-k(t-t_0) \tag{4}$$

对于一切 $t\geqslant t_0$ 成立. 然而(4)的右边在 $t\to\infty$ 时变为负无穷大，故 $t\to\infty$ 时 $E(t)\to-\infty$. 这就跟 $E(x,y)\geqslant 0$ 相矛盾，故可断言 $L=0$, 从而完成了证明.

例 1. 考察装在弹簧上的一个质量 m 的运动方程:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0. \tag{5}$$

这里 $c\geqslant 0$ 是代表质量运动媒质滞性的常数，$k>0$ 是弹簧常数. 等价于(5)的自治方程组是

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{k}{m}x-\dfrac{c}{m}y,\end{cases} \tag{6}$$

而它的唯一临界点是 $(0,0)$. 这个质量的动能是 $my^2/2$, 它的势能(或者说储存在弹簧里的能量)是

$$\int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

故该系统的总能量是

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2. \tag{7}$$

容易看出(7)是正定的；又因

$$\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G = kxy - my\left(-\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y\right)$$
$$= -cy^2 \leqslant 0,$$

故(7)是(6)的李亚普诺夫函数，因而临界点是稳定的. 我们从习题42-4知道，$c>0$时，这个临界点是渐近稳定的，但就这里所讨论的特定的李亚普诺夫函数来说，不能得出这一事实①.

例 2. 方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2xy \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y^3 \end{cases} \tag{8}$$

具有一个孤立临界点(0, 0). 现在我们要设法作一个形式为$E(x, y) = ax^{2m} + by^{2m}$的李亚普诺夫函数来证明稳定性. 我们显然有

$$\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G = 2max^{2m-1}(-2xy) + 2nby^{2n-1}(x^2 - y^3)$$
$$= (-4max^{2m}y + 2nby^{2n-1}x^2) - 2nby^{2n+2}.$$

我们想使括弧里的式子等于0，观察的结果，我们知道若取$m=1$，$n=1$，$a=1$及$b=2$就可达到这个目的. 选取这些数之后，我们有$E(x, y) = x^2 + 2y^2$(它是正定的)以及$(\partial E/\partial x)F + (\partial E/\partial y)G = -4y^4$(它

---

① 我们现在知道，用合适的李亚普诺夫函数总能查出稳定性和渐近稳定性，但从原理上知道存在这样一个函数，和实际找出这一函数，是很不相同的事. 要想查阅这事，可参看L. Cesari《常微分方程中的渐近性态及稳定性问题》("Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations, p. 111, 1963)或G. Sansone and R. Conti,《非线性微分方程》("Non-Linear Diff. Eqs." p. 481, 1964).

是半负定的)．所以方程组(8)的临界点(0, 0)是稳定的．

从这个例子可以看出，在复杂的情形下，很难作出合适的李亚普诺夫函数．下述结果有时有助于解决这一问题．

定理 B． 函数 $E(x, y)=ax^2+bxy+cy^2$ 为正定，当且仅当 $a>0$ 且 $b^2-4ac<0$；它为负定，当且仅当 $a<0$ 且 $b^2-4ac<0$.

证明．若 $y=0$，则有 $E(x, y)=ax^2$，故对于 $x\neq 0$，$E(x, 0)>0$ 当且仅当 $a>0$．若 $y\neq 0$，我们有

$$E(x, y)=y^2\left[a\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\left(\frac{x}{y}\right)+c\right];$$

而当 $a>0$，方括号里 x/y 的多项式(它对于大的 x/y 值是正的)对于一切 x/y 是正的，当且仅当 $b^2-4ac<0$．这就证明了定理的第一部分，而其第二部分则只要考虑函数 $-E(x, y)$ 便立即得证．

习　题

1．试确定下列函数是否为正定、负定或两者都不是：

a．x^2-xy-y^2；　　b．$2x^2-3xy+3y^2$；

c．$-2x^2+3xy-y^2$；　　d．$-x^2-4xy-5y^2$．

2．试证形式为 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 的一个函数既不可能是正定的，也不可能是负定的．

3．试证(0, 0)是下列方程组的渐近稳定临界点：

a．$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x^3-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x^5-2y^3;\end{cases}$　　b．$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x+xy^3\\ \dfrac{dy}{dt}=-x^2y^2-y^3.\end{cases}$

4．试证，方程组(1)的临界点(0, 0)是非稳定的，如果存在一个函数 $E(x, y)$ 具下列各性质：

a．$E(x, y)$ 在某个含原点的某一域上连续且有连续的一阶偏导数；

b．$E(0, 0)=0$；

c．在以(0, 0)为心的每个圆内至少含有一点，使该处的 $E(x, y)$ 为正；

d．$\left(\dfrac{\partial E}{\partial x}\right)F+\left(\dfrac{\partial E}{\partial y}\right)G$ 是正定的．

5．试证(0, 0)是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2xy+x^3\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x^2+y^5\end{cases}$$

的一个非稳定临界点.

6. 设函数 $f(x)$ 具以下性质: $f(0)=0$ 且对于 $x\neq 0$ 有 $xf(x)>0$[即, 当 $x>0$ 时 $f(x)>0$, 而当 $x<0$ 时 $f(x)<0$].

 a. 试证

$$E(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x f(x)dx$$

 是正定的.

 b. 试证方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0$$

 以 $x=0$, $y=\dfrac{dx}{dt}=0$ 为一稳定临界点.

 c. 若在原点的某邻域上 $g(x)\geqslant 0$, 试证方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+g(x)\frac{dx}{dt}+f(x)=0$$

 以 $x=0$, $y=\dfrac{dx}{dt}=0$ 为一稳定临界点.

44. 非线性方程组的简单临界点

设自治方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x,y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=G(x,y)\end{cases}\tag{1}$$

具有孤立临界点(0, 0). 若 $F(x,y)$ 及 $G(x,y)$ 能展成 x 与 y 的幂级数, 则(1)取下列形式:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_1x+b_1y+c_1x^2+d_1xy+e_1y^2+\cdots\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=a_2x+b_2y+c_2x^2+d_2xy+e_2y^2+\cdots\end{cases}\tag{2}$$

当$|x|$及$|y|$取小值，也就是当(x, y)接近原点时，二次及更高次项的值很小. 因此我们自然会去掉这些非线性项，并料想(2)的路线在临界点(0, 0)附近的大体性态，将与其相关线性方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_1x+b_1y \\ \dfrac{dy}{dt}=a_2x+b_2y \end{cases} \tag{3}$$

的路线的性态相似. 我们可以看到，一般说来，实际情形确是如此. 用线性方程组(3)来代替(2)的步骤通常叫做**线性化步骤**.

更一般地，我们将考察下列形式的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_1x+b_1y+f(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt}=a_2x+b_2y+g(x, y). \end{cases} \tag{4}$$

我们将假定

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

以使相关的线性方程组(3)具有一孤立临界点(0, 0)；又$f(x, y)$及$G(x, y)$对所有(x, y)连续且具有连续的一阶偏导数；且当$(x, y)\to(0,0)$时有

$$\lim\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \quad 及 \quad \lim\frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0. \tag{6}$$

注意，由条件(6)可知$f(0, 0)=0$及$g(0, 0)=0$，故(0, 0)是(4)的一个临界点；并且，不难证明这临界点是孤立的(见习题1). 在上述这些限制下，我们说(0, 0)是方程组(4)的一个**简单临界点**.

例 1. 对于方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-2x+3y+xy \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y-2xy^2 \end{cases} \tag{7}$$

我们有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

故(5)满足．又，用极坐标可知

$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|r^2 \sin\theta\cos\theta|}{r} \leqslant r$$

及

$$\frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|2r^3 \sin^2\theta\cos\theta|^2}{r} \leqslant 2r^2,$$

故当 $(x,\ y) \to (0,\ 0)$（或者说当 $r \to 0$）时 $f(x,\ y)/r$ 以及 $g(x,\ y)/r$ 都 $\to 0$．这表明条件(6)也是满足的，故(0,0)是方程组(7)的一个简单临界点．

关于简单临界点性质的主要事实由下述庞加莱定理给出，我们这里只叙述而不证明①．

定理A． 设(0,0)是非线性方程组(4)的一个简单临界点，而我们考虑相关线性方程组(3)．若(3)的临界点(0,0)属于第42节所述三个主要情形之一，则(4)的临界点(0,0)也属于同一类型．

作为一个例子，我们来考察例1中的非线性方程组(7)，它的相关线性方程组是

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases} \tag{8}$$

(8)的辅助方程是 $m^2 + m + 1 = 0$，其根为

$$m_1,\ m_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}.$$

---

① 详细讨论可参看 W. Hurewicz, "Lectures on Ordinary Diff. Eqs." pp. 86—98, 1958; L. Cesari, "Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Diff. Eqs.", pp. 157—163, 1963; 或 F. G. Tricomi, "Diff. Eqs." pp. 53—72, 1961.

由于这些根是共轭复数而非纯虚数，故得情形 C，于是线性方程组(8)的临界点(0, 0)是个螺旋点. 根据定理 A，非线性方程组(7)的临界点(0, 0)也是个螺旋点.

我们应该认识到，虽然在定理所规定的情形下(4)的临界点与(3)的临界点(0, 0)都属于同一类型，但它们的路线的实际形状却可能颇为不同. 例如，图 51 画出的是一个线性方程组的典型鞍点，而图 58 则大致描出一个非线性方程组的鞍点该是什么样子. 在后一图里显然存在一定程度的畸变，然而两个图中的大体情景则是一样的.

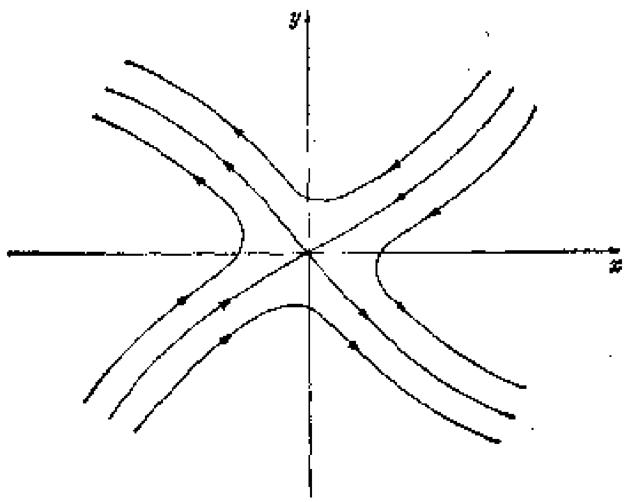


图 58

我们自然要想知道两种交界情形究竟如何，因为它们并未在定理 A 中提及. 这方面的事实是：若相关线性方程组(3)在原点处具有一交界节点(情形 D)，则非线性方程组(4)可有一节点或一螺旋点；而若(3)在原点处有一中心点(情形 E)，则(4)可有一中心点或一螺旋点. 例如，(0, 0)都是下列非线性方程组的临界点：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x^2\\ \dfrac{dy}{dt}=x\end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x^3\\ \dfrac{dy}{dt}=x,\end{cases} \tag{9}$$

两者的相关线性方程组都是

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x.\end{cases}\tag{10}$$

易知(0, 0)是(10)的中心点. 然而可以证明(0, 0)诚然是(9)中第一个方程组的中心点,它却是第二个方程组的螺旋点①.

关于线性方程组临界点附近的路线图,我们已经见过了相当多不同的情况,而以上刚讲过的,说明在非线性方程组简单临界点附近并没有出现什么新的情况. 那末关于非简单的临界点又是怎样呢? 想要了解这里可能出现的情况,最好是考察一下形式如(2)的一个非线性方程组. 若(2)中的线性项不足以确定原点附近路线的格局,那就必须考虑二次项;如果那还不足以确定路线格局,就必须进而考虑三次项等等. 这表明除了线性图形之外还能出现许许多多别的情形,其变化无穷,其复杂程度也难以捉摸. 我们在图 59 里画出其中的一些. 读者也许会感

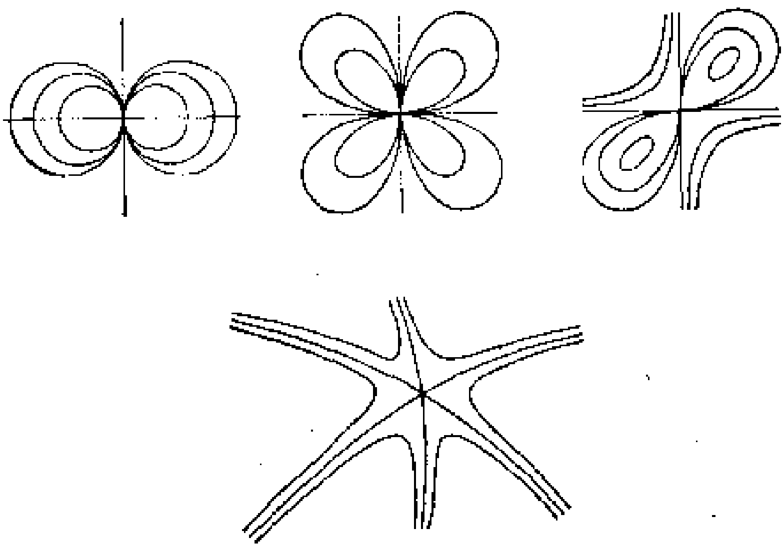


图 59

到惊异的是,这类复杂的格局竟能出现在外形颇为简单的方程组里. 例如,上面那一排里的三个图形分别表示了以下三个方程组的路线格局

① 参看 Hurewicz 一书 p. 99.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2xy\\ \dfrac{dy}{dt}=y^2-x^2,\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x^3-2xy^2\\ \dfrac{dy}{dt}=2x^2y-y^3,\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-4y\sqrt{|xy|}\\ \dfrac{dy}{dt}=-y+4x\sqrt{|xy|}.\end{cases}$$

在第一个方程组的情形下，这只要看看图3及方程3-(8)就立刻清楚了.

现在我们对简单的临界点来讨论它的稳定性问题. 这方面的主要结果归功于李亚普诺夫：若(3)在原点处渐近稳定则(4)亦然. 现将其正式陈述如下.

定理B. 设(0, 0)是非线性方程组(4)的一个简单临界点，并考察相关线性方程组(3). 若(3)的临界点(0, 0)是渐近稳定的，则(4)的临界点(0, 0)也是渐近稳定的.

证明. 根据定理43-A，只要作方程组(4)的一个合适的李亚普诺夫函数就行，而这正是我们所做的.

定理42-B告诉我们线性方程组(3)的系数满足以下条件：

$$p=-(a_1+b_2)>0 \text{ 及 } q=a_1b_2-a_2b_1>0. \tag{11}$$

现在定义

$$E(x,y)=\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2),$$

而令

$$a=\frac{a_2^2+b_2^2+(a_1b_2-a_2b_1)}{D},$$

$$b=-\frac{a_1a_2+b_1b_2}{D},$$

$$c=\frac{a_1^2+b_1^2+(a_1b_2-a_2b_1)}{D},$$

其中

$$D=pq=-(a_1+b_2)(a_1b_2-a_2b_1).$$

由(11)，可知 $D>0$ 及 $a>0$. 又，通过简单的计算可知

$$D^2(ac-b^2)=(a_2^2+b_2^2)(a_1^2+b_1^2)$$

$$+(a_2^2+b_2^2+a_1^2+b_1^2)(a_1b_2-a_2b_1)$$

$$+(a_1b_2-a_2b_1)^2-(a_1a_2+b_1b_2)^2$$

$$=(a_2^2+b_2^2+a_1^2+b_1^2)(a_1b_2-a_2b_1)+2(a_1b_2-a_2b_1)^2>0,$$

故 $b^2-ac<0$. 于是根据定理 43-B 可知函数 $E(x, y)$ 是正定的. 又, 通过另外一次计算(细节请读者自己去做)得到

$$\frac{\partial E}{\partial x}(a_1x+b_1y)+\frac{\partial E}{\partial y}(a_2x+b_2y)=-(x^2+y^2). \tag{12}$$

这个函数显然是负定的, 故 $E(x, y)$是线性方程组(3)的李亚普诺夫函数①.

其次我们证明 $E(x,y)$ 也是非线性方程组(4)的李亚普诺夫函数. 若将 F 及 G 定义为

$$F(x, y)=a_1x+b_1y+f(x, y)$$

及

$$G(x, y)=a_2x+b_2y+g(x, y),$$

则由于已知 E 为正定的, 只要证明

$$\frac{\partial E}{\partial x}F+\frac{\partial E}{\partial y}G \tag{13}$$

为负定的就行了. 若利用(12), 则(13)就变为

$$-(x^2+y^2)+(ax+by)f(x, y)+(bx+cy)g(x, y);$$

再引用极坐标, 可将上式写为

$$-r^2+r[(a\cos\theta+b\sin\theta)f(x, y)+(b\cos\theta+c\sin\theta)g(x, y)].$$

把数 $|a|$, $|b|$, $|c|$ 中之最大者记为 K. 这时由我们假定的条件(6)知, 对于足够小的 $r>0$,

$$|f(x, y)|<\frac{r}{6K}\quad 及\quad |g(x, y)|<\frac{r}{6K},$$

故对于这样的 r,

$$\frac{\partial E}{\partial x}F+\frac{\partial E}{\partial y}G<-r^2+\frac{4Kr^2}{6K}=-\frac{r^2}{3}<0.$$

---

① 现在可以看出为什么要这样定义 a, b, 及 c 的理由: 我们需要(12)能成立.

于是 $E(x, y)$ 是个正定函数且能使(13)为负定. 现在从定理 43-A 可知(0, 0)是(4)的一个渐近稳定临界点, 定理证毕.

为说明这一定理, 我们再次考虑例 1 的非线性方程组(7), 而(7)的相关线性方程组是 (8). 对于 (8) 我们有 $p=1>0$ 及 $q=1>0$, 故临界点 (0, 0)对于线性方程组(8)以及对于非线性方程组 (7) 来说都是渐近稳定的.

例 2. 从第 40 节知摆的衰减振动方程是

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{g}{a}\sin x=0,$$

其中 c 是个正的常数. 其等价的非线性方程组是

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{g}{a}\sin x-\dfrac{c}{m}y.\end{cases}\tag{14}$$

现把(14)写为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{g}{a}x-\dfrac{c}{m}y+\dfrac{g}{a}(x-\sin x).\end{cases}\tag{15}$$

易见 $(x, y)\to(0, 0)$ 时

$$\frac{x-\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0,$$

因若 $x\neq 0$, 我们有

$$\frac{x-\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{x-\sin x}{|x|}=\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|\to 0;$$

又由于(0, 0)显然是相关线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{g}{a}x-\dfrac{c}{m}y\end{cases}\tag{16}$$

的一个孤立临界点, 故知(0, 0)是(15)的一个简单临界点. 根据观察

($p=c/m>0, q=g/a>0$)可知(0, 0)是(16)的一个渐近稳定临界点，故由定理 B 知它也是 (15) 的一个渐近稳定临界点．这反映了一件明显的物理事实：若摆稍受干扰，则所产生的运动将随着时间的推移而归于消失．

习　题

1. 试证，若(0, 0)是(4)的一个简单临界点，则它必然是孤立的。提示：把条件(6)写为 $f(x, y)/r=\epsilon_1\to 0$ 及 $g(x, y)/r=\epsilon_2\to 0$，然后在条件(5)之下利用极坐标进行间接证明，即假设 (4) 右边在任意接近原点但异于原点的点处都等于0，然后从这一假设推出一个矛盾．
2. 大致描出极坐标方程 $r=a\sin 2\theta$ 所表示的曲线族(见图 59)，并将这曲线族的微分方程表为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{G(x,y)}{F(x,y)}$ 的形式．
3. 若(0, 0)是(4)的一个简单临界点且 $q=a_1b_2-a_2b_1<0$，则由定理 A 知(0, 0)是(4)的一个鞍点从而是非稳定的．试证，若 $p=-(a_1+b_2)<0$ 且 $q=a_1b_2-a_2b_1>0$，则(0, 0)是(4)的一个非稳定临界点．提示：采用定理 B 的证法，证明存在一个正定函数 $E(x, y)$ 能使
$$\frac{\partial E}{\partial x}(a_1x+b_1y)+\frac{\partial E}{\partial y}(a_2x+b_2y)=x^2+y^2,$$
并应用习题 43-4．(请注意，从这些事实以及定理B，说明图 55 中关于渐近稳定性以及非稳定性所指出的一切，都可从相关线性方程组的情况直接推到具有简单临界点的非线性方程组上．)
4. 试证(0, 0)是
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x^3\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x-y^3\end{cases}$$
的一个渐近稳定临界点，但它是
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x^3\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x+y^3\end{cases}$$
的一个非稳定临界点．试问这些事实怎么能同题 3 括弧里所说明的事联系起来？

5. 验证(0, 0)是下列各方程组的一个简单临界点，并确定它的性质及稳定情况：

a. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-2xy\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-2x+y+3y^2;\end{cases}$$

b. $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y-3x^2y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-2x-4y+y\sin x.\end{cases}$$

6. 范德波(van der Pol)方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0$$

等价于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x-\mu(x^2-1)y.\end{cases}$$

试就 $\mu>0$ 及 $\mu<0$ 两种情形考察临界点(0, 0)的稳定情况。

45. 非线性力学．守恒系统

大家都知道，在任一实际动力系统的工作过程中，通常总要通过某种磨擦作用的形式消耗能量．然而在某些场合这一消耗过程很缓，以致在相对短的时期内可将其忽略．在这种情况下可假定有能量守恒定律，即假定动能与势能之和为一恒量．这类系统叫**守恒系统**．例如，转动不息的地球，在只包含几个世纪的短期间内可以看作是个守恒系统，但若要研究它在几百万年之间的整个性态，那就必须把潮汐摩擦所损耗的能量估计进去．

最简单的守恒系统是装在弹簧上的一个质量 m 在真空里作直线运动．若 x 表 m 离开其平衡位置的位移，弹簧作用于 m 上的恢复力是 $-kx(k>0)$，则知运动方程是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0.$$

这类弹簧叫线性弹簧，因为恢复力是 x 的一个线性函数. 若 m 在阻尼媒质中运动,而作用于 m 上的阻力(或衰减力)是 $-c(dx/dt)$(其中 $c>0$),那末这个非守恒系统的运动方程是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0.$$

这里的衰减作用是线性衰减的,因为衰减力是 dx/dt 的一个线性函数. 仿此,若 f 及 g 是具有性质 $f(0)=0$ 及 $g(0)=0$ 的任意函数,则可把更一般的方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+g\left(\frac{dx}{dt}\right)+f(x)=0 \tag{1}$$

看作是质量 m 在恢复力 $-f(x)$ 及衰减力 $-g(dx/dt)$ 作用下的运动方程. 一般说来，这些力是非线性的，故方程(1)可以看作是非线性力学的基本方程. 在本节中，我们将简略讨论非线性守恒系统一个特殊情形,它的运动方程是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0, \tag{2}$$

这里衰减力是0,因而没有能量损耗①.

方程(2)等价于自治方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{f(x)}{m}.\end{cases} \tag{3}$$

若消去 dt,便得出(3)在相平面中的路线的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f(x)}{my}, \tag{4}$$

这方程又可写为

$$mydy=-f(x)dx. \tag{5}$$

① 关于(1)的长篇论述及其对各种物理问题上的应用可参看 J. J. Stoker《非线性振动》("Nonlinear Vibrations", 1950)及 A. A. 安德尔诺夫等,振动理论,科学出版社,1973, 1974.

若当 $t=t_0$ 时 $x=x_0$ 及 $y=y_0$, 则将(5)从 t_0 积分到 t, 得到

$$\frac{1}{2}my^2-\frac{1}{2}my_0^2=-\int_{x_0}^{x}f(x)dx$$

或

$$\frac{1}{2}my^2+\int_0^x f(x)dx=\frac{1}{2}my_0^2+\int_0^{x_0}f(x)dx. \tag{6}$$

为说明这一结果的物理意义, 我们指出, $\frac{1}{2}my^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ 是该动力系统的动能, 而

$$V(x)=\int_0^x f(x)dx \tag{7}$$

是它的势能. 因此方程(6)表达了能量守恒定律

$$\frac{1}{2}my^2+V(x)=E, \tag{8}$$

这里 $E=\frac{1}{2}my_0^2+V(x_0)$ 是该系统的不变的总能量. (8)显然就是(3)的路线的方程, 因为它是解方程(4)后得出的. 由指定 E 值而得出的一个特定路线, 是相平面上具有常数能量的一个曲线. 方程组(3)的临界点是 $(x_c, 0)$ 这些点, 其中 x_c 是方程 $f(x)=0$ 的根. 如我们在第 40 节中所指出的, 这些是(2)所描述的那个动力系统的平衡点. 从(4)可知, 这些路线穿过 x 轴时与它成直角, 而在穿过直线 $x=x_c$ 时是水平的. 方程(8)又说明这些路线是对称于 x 轴的.

若把(8)写为

$$y=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}, \tag{9}$$

就易于按下列步骤作出路线. 先定出一个 xz 平面, 取 z 轴与相平面的 y 轴在同一竖线上(图 60). 其次在 xz 平面上画出曲线 $z=V(x)$ 以及若干水平线 $z=E$(图中画出一根这样的线), 并注意差 $E-V(x)$ 的几何意义是什么. 最后, 相应于每个 x, 将前一步所得的 $E-V(x)$ 乘以 $2/m$, 并应用公式(9)在正下方的相平面(xy 平面)上画出对应的 y 值. 注意,

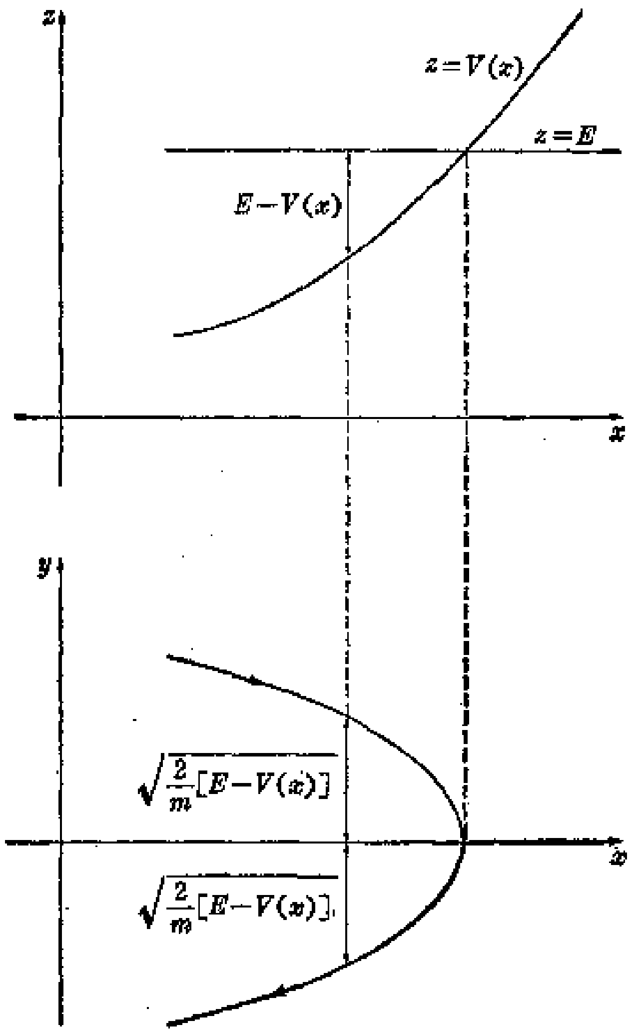


图　60

由于$\frac{dx}{dt}=y$，在 x 轴以上的任一路线的正方向是朝右的，而在 x 轴以下的路线正方向朝左.

例 1. 在第 40 节中，我们知道非衰减摆的运动方程是

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\sin x=0, \tag{10}$$

其中 k 是个正的常数. 由于这方程具有(2)那种形式，故可把它所描述的运动，看作是单位质量在恢复力为 $-k\sin x$ 的非线性弹簧作用下的非衰减直线运动. 等价于(10)的自治方程组是

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-k\sin x,\end{cases}\tag{11}$$

它的临界点是$(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, $\cdots$. 路线的微分方程是

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{k\sin x}{y},$$

分离变量并积分, 得这族路线的方程是

$$\frac{1}{2}y^2+(k-k\cos x)=E.$$

这显然具有(8)的形式, 但其中 $m=1$, 而

$$V(x)=\int_0^x f(x)dx=k-k\cos x$$

是势能. 现在我们来画路线. 先在 xz 平面上画出曲线 $z=V(x)$ 以及若干直线 $z=E$(图 61, 那里只画出一根直线 $z=E=2k$). 从这图上可读出 $E-V(x)$诸值, 然后用公式 $y=\pm\sqrt{2[E-V(x)]}$在正下方的相平

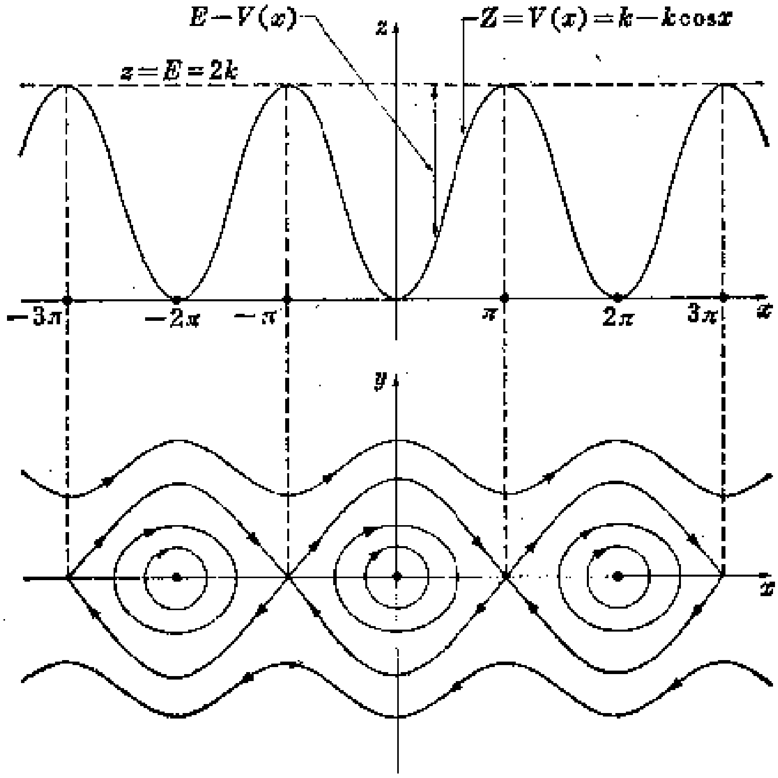


图 61

而上画出路线的略图．从这个相图里可以明显看出，若总能量E在0与$2k$之间，则相应的路线是闭合的，于是方程(10)具有周期解．而若$E>2k$，则路线不闭合，(10)的相应的解为非周期的．$E=2k$这个值把两类不同的运动分了开来，因此，相应于$E=2k$的路线叫**分型路线**(separatrix)．分型路线之外的波状路线相应于摆的旋动(whirling motions)，而分型路线之内的闭合路线相应于摆的振动．它的一些临界点显然是交互为非稳定的鞍点以及稳定但非渐近稳定的中心点．为进行对比，我们值得考察一下这守恒动力系统化为非守恒系统时所发生的变化．我们对这系统引入一个线性的衰减力，这时运动方程的形式是

$$\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+k\sin x=0,\qquad c>0,$$

它的路线的分布情况大致如图62所示．我们看到，图61里的中心点在这里变成渐近稳定螺旋点，而且每一个路线(除了在$t\to\infty$时进入鞍点的那些分型路线之外)最终都卷曲进入这些螺旋点之一．

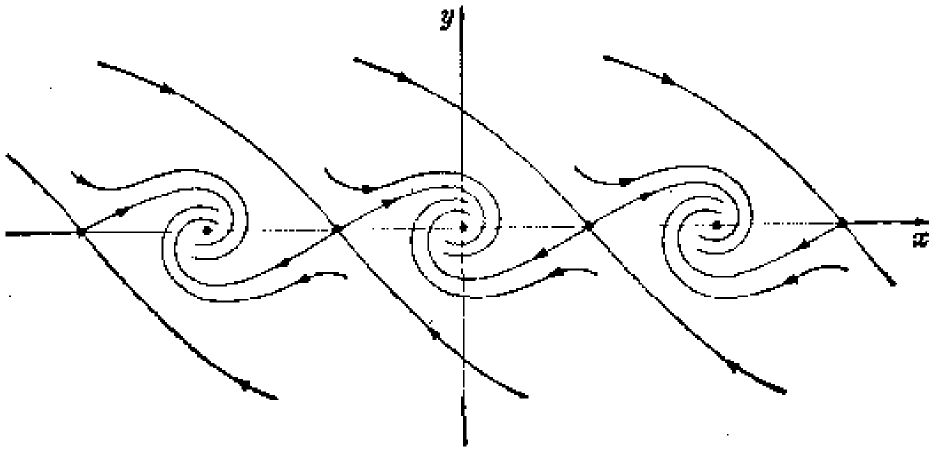


图　62

习　　题

1．若$f(0)=0$且对于$x\neq 0$有$xf(x)>0$，试证

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0$$

的路线是相平面上原点四周的闭合线；也就是，试证临界点 $x=0$, $y=dx/dt=0$ 是稳定的但非渐近稳定的中心点. 试就 $f(0)=0$ 而在 $x\neq0$ 时 $xf(x)<0$ 的情形，描述这个临界点的性质及其稳定情况.

2. 实际弹簧大多是非线性的. 根据其恢复力的增大率大于或小于位移的线性函数，我们把非线性弹簧区分为硬的或软的两种. 方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+kx+\alpha x^3=0, \qquad k>0,$$

在 $\alpha>0$ 时描述硬弹簧的运动，而在 $\alpha<0$ 时描述软弹簧运动，试画出每种情形的路线图.

3. 试求 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-x+2x^3=0$ 的路线的方程，并在相图上画出这些路线的概貌. 定出临界点及每个临界点的性质.

4. 由于自方程(7)有 $\dfrac{dV}{dx}=f(x)$，故(3)的临界点是相平面的 x 轴上使 $V'(x)=0$ 的那些点. 就其对于曲线 $z=V(x)$ 的情况而言(如果这曲线光滑且性态正常)，有三种可能情况：极大，极小以及拐点. 试画出所有这三种情况，并确定每一情况下的临界点的类型(第三类型的临界点叫尖点).

46. 周期解. 庞加莱-本狄克生(Poincare-Bendixson)定理

考察非线性自治方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x,y)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=G(x,y),\end{cases} \tag{1}$$

其中函数 $F(x,y)$ 及 $G(x,y)$ 在整个相平面上连续且具有连续的一阶偏导数. 迄今所讲材料几乎并没有告诉我们(1)的路线如何，而只告诉它们在某些类临界点附近的情况. 然而在许多问题中，我们对路线的全面情况比这些局部性质还更为关切. 路线的全面性质(或大范围性质)描述它们在相平面大片区域上的性态，而一般说这是很难确定的.

全面性理论的中心问题是确定(1)是否具有闭合路线. 如第40中所指出的，这个问题之所以重要乃是因为它同(1)之是否具有周期解密

切相关. (1)的一个解 $x(t)$ 及 $y(t)$(若二者都不是常数)是**周期的**, 如果二者对所有 t 都有定义, 如果又存在一数 $T>0$, 使对于所有 t 都成立 $x(t+T)=x(t)$ 及 $y(t+T)=y(t)$. 具有这一性质的最小的那个 T 叫做解的**周期**①. (1)的每个周期解显然确定一个闭合路线, 并当 t 从任一 t_0 增到 t_0+T 时, 就描出一次闭合路线. 反之, 若 $C[x(t), y(t)]$ 是(1)的一个闭合路线, 则易知 $x(t), y(t)$ 是一周期解. 因此, 求(1)的周期解的问题就转化为求其闭合路线的问题.

从第 42 节可知, 一个线性方程组具有闭合路线, 当且仅当其辅助方程的根为纯虚数, 并且在这种情况下, 每一路线都是闭合的. 因此就一线性方程组来说, 或者它的每一路线都闭合, 或者根本没有闭合路线. 然而一个非线性方程组却完全可以具有一个孤立的闭合路线, 即附近没有其他闭合路线的那种闭合路线. 下面是这样一个方程组的熟知的例子:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x(1-x^2-y^2)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+y(1-x^2-y^2).\end{cases} \tag{2}$$

为解这个方程组, 我们引用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 将 $x^2+y^2=r^2$ 及 $\theta=\tan^{-1}(y/x)$ 微分, 可得有用的公式

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=r\frac{dr}{dt} \quad 及 \quad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt}. \tag{3}$$

以 x 乘(2)的第一式, 以 y 乘(2)的第二式, 相加, 得到

$$r\frac{dr}{dt}=r^2(1-r^2). \tag{4}$$

同样, 若以 x 乘第二式以 y 乘第一式并相减, 得到

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=r^2. \tag{5}$$

方程组 (2) 在 $r=0$ 处有单独一个临界点. 因我们关心的只是求路线,

① 每个周期解必有这种意义下的一个周期. 何故?

故可设 $r>0$．这时，从(4)及(5)知(2)可变为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=r(1-r^2)\\ \dfrac{d\theta}{dt}=1.\end{cases}\tag{6}$$

这两个方程容易单独解出，于是得(6)的通解为

$$\begin{cases}r=\dfrac{1}{\sqrt{1+ce^{-2t}}}\\ \theta=t+t_0.\end{cases}\tag{7}$$

(2)的相应通解是

$$\begin{cases}x=\dfrac{\cos(t+t_0)}{\sqrt{1+ce^{-2t}}}\\ y=\dfrac{\sin(t+t_0)}{\sqrt{1+ce^{-2t}}}.\end{cases}\tag{8}$$

现在我们从几何图形来分析(7)(图 63)．若 $c=0$，则解为 $r=1$ 及 $\theta=t_0+t$，它以反时针方向描出圆 $x^2+y^2=1$．若 $c<0$，则显然 $r>1$ 且当 $t\to\infty$ 时 $r\to 1$．又，若 $c>0$，则 $r<1$，而 $t\to\infty$ 时仍有 $r\to 1$．这些事

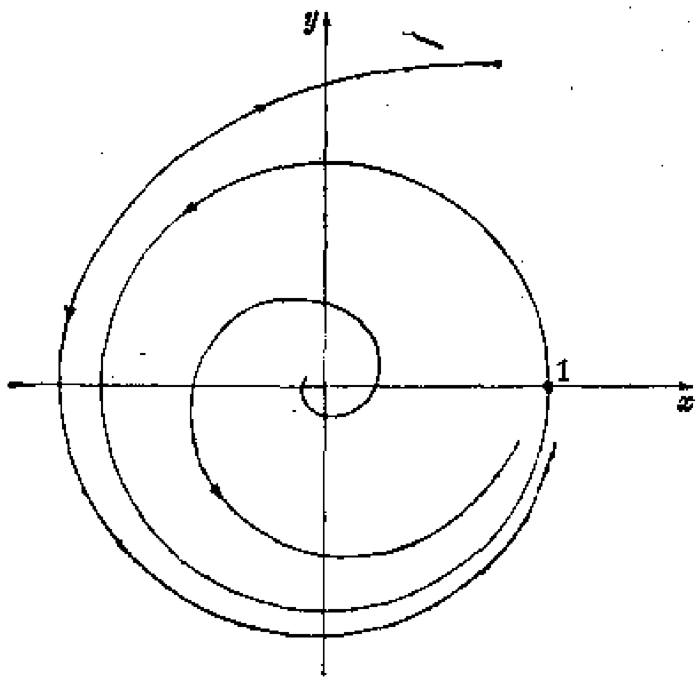


图 63

实说明存在一个单独的闭合路线($r=1$)，随着 $t\to\infty$，所有其他路线都以螺旋线的方式从内部或外部趋近于它.

在以上的讨论中我们通过实际求出方程组(2)的一个闭合路线证明它具有这样一个路线. 在一般情况下，我们当然不能指望做到这一点. 我们所需要的是一些检验法，以便使我们有可能判断相平面的某些区域是否含有闭合路线. 第一个这样的检验法是由下述庞加莱定理所提供的. 它的一个证明概述在习题 1 中.

定理A. 方程组(1)的一闭合路线必然包围着该方程组的至少一个临界点.

这结果给出了一个价值颇为有限的否定检验法：若一方程组在给定区域内无临界点，它在该区域不能有闭合路线.

下面的定理提供另一个否定检验法，它是属于本狄克生的[①].

定理B. 若 $\partial F/\partial x+\partial G/\partial y$ 在相平面的某区域上恒为正或恒为负，则方程组(1)在该区域不能有闭合路线.

证明　假如该区域有一闭合路线 $C=[x(t),y(t)]$，其内部记为 R. 于是根据格林定理及此处的假定可知

$$\int_C (F dy-G dx)=\iint_R\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\right)dx dy\neq 0.$$

然而在 C 上有 $dx=F dt$ 及 $dy=G dt$，故

$$\int_C (F dy-G dx)=\int_0^T (FG-GF)dt=0.$$

这个矛盾证明我们原先的假定不正确，故所论域里不能有任何闭合路线.

这些定理有时有用，但我们所需要的是肯定性的检验法，能提供(1)具有闭合路线的充分条件的. 这一类的少数几个一般性定理之一

① 本狄克生(Ivar Otto Bendixson, 1861—1935)瑞典数学家. 他在 1901 年发表一篇重要的论文，补充了庞加莱的一些早年的结果. 他任斯德哥尔摩大学教授(其后为校长)，长期为该市市议会的一名活跃议员.

就是庞加莱-本狄克生定理，现叙述这一古典定理如下，而未予证明①.

定理C. 设R是相平面的有界域并包括其边界在内，且设R并不含有方程组(1)的任何临界点. 若$C=[x(t), y(t)]$是(1)的这样一个路线，它在某个t_0时位于R内且在所有的$t\geq t_0$时都保持在R内，则或者是C本身为一闭合路线，或者当$t\to\infty$时它以螺旋方式趋近一闭合路线. 这样，在两种情况下方程组(1)在R内都有一闭合路线.

为理解这一命题，我们来考察图64所示的情况. 这里R由两闭虚线及其间的环状域组成. 设矢量

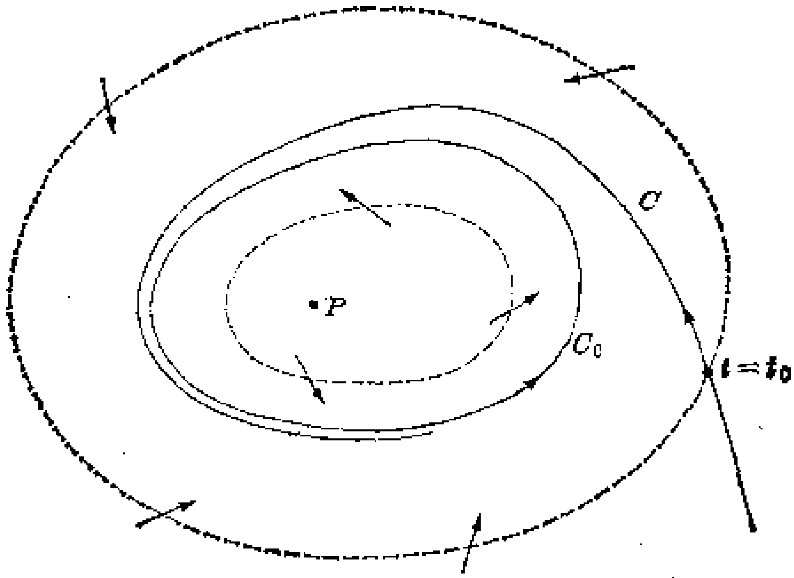


图　64

$$\mathbf{V}(x, y)=F(x, y)\mathbf{i}+G(x, y)\mathbf{j}$$

在每一边界点处都是指向R内部的. 于是，通过一边界点(在$t=t_0$时)的每个路线C必然要进入R内并且再也不离开它，而在这些情况下定理告诉我们说C必然会以螺线方式趋近一闭合路线C_0. 我们选取一环形域来说明定理，因为像C_0这样的一个闭合路线必须包围着一个临界点(图中的P)，而R却必须排除一切临界点.

方程组(2)给这些思想提供一个简单的应用. (2)显然在(0, 0)处

① 欲悉其详，可参阅 Hurewicz pp. 102—111，或 Cesari pp. 163—167.

有一临界点，而且圆 $r=\frac{1}{2}$ 及 $r=2$ 之间的区域 R 内不含临界点．在我们以前的分析中曾得出

$$\text{对于 } r>0 \quad \frac{dr}{dt}=r(1-r^2).$$

这说明在内圆上 $dr/dt>0$ 而在外圆上 $dr/dt<0$，故 $\mathbf{V}$ 在所有边界点处都指向 R 内部．这样，通过一边界点的任一路线都会进入 R 且当 $t\to\infty$ 时保持在 R 内，于是根据庞加莱-本狄克生定理可知 R 含有一闭合路线 C_0．我们已经知道圆 $r=1$ 就是那个闭合路线，而现在我们按以上所讲保证了它的存在．

从理论观点讲，庞加莱-本狄克生定理是很能令人满意的，但一般说用起来颇难．有一种更实用的检验法可保证形如

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=0 \tag{9}$$

的方程具有闭合路线．这种方程叫李那 (Liénard) 方程[①]．当我们说到(9)这样一个方程的闭合路线时，所指的当然是其等价方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y\end{cases} \tag{10}$$

的一个闭合路线；而且我们又知道，(10)的一个闭合路线相应于(9)的一个周期解．关于(9)的闭合路线的基本事实叙述在以下的定理中．

定理D．（李那定理） 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足以下条件：(i)两者对所有 x 都连续且有连续导数；(ii) $g(x)$ 是那样的一个奇函数，对于 $x>0$ 有 $g(x)>0$；而 $f(x)$ 是偶函数；以及 (iii) 奇函数 $F(x)=$

---

① 李那(Alfred Liénard, 1869—1958)是法国科学家，其大半生执教于巴黎矿业学院并在 1929 年任该院院长．他在物理方面的研究工作主要属于电学、磁学、弹性理论以及流体动力学等领域．他常常从事研究他在其他科学工作中所碰到的数学问题，并在 1933 年当选为法国数学会主席．他是个平易近人的独身汉，一辈子把他的精力完全献给他的工作和他的学生．

$\int_0^x f(x)dx$ 恰有一正的零点在 $x=a$ 处，在 $0<x<a$ 上为负，而在 $x>a$ 上为正并且非减. 又当 $x\to\infty$ 时 $F(x)\to\infty$. 这时，方程(9)在相平面上有包围原点的唯一闭合路线，且每一其他路线在 $t\to\infty$ 时都以螺线方式趋近于它.

坚韧不懈地持怀疑态度的读者，理所当然地不愿接受没有证明的定理，为满足他们的需要，我们在附录 B 里给出了这一定理的证明. 但我们对定理中所设条件的作用可获得一直观的理解，只要用上一节的思想来看待(9). 根据这一观点，(9)可以看作是这样一个动力系统的运动方程，它由装在弹簧上的单位质量组成，但同时受一恢复力 $-g(x)$ 及衰减力 $-f(x)dx/dt$ 的作用. 关于 $g(x)$ 所作的假定等于说弹簧具有我们所预料的性质，并将使任何位移的数值趋于减小. 而关于 $f(x)$ 所作的假定(粗略说来就是，对于小的 $|x|$，$f(x)$ 为负，对于大的 $|x|$ 则为正)，则表示运动在小的 $|x|$ 时会加剧，而在大的 $|x|$ 时会变缓，因而趋于一种稳恒振动. $f(x)$ 的这一特殊性态也可表述为：这物理系统在 $|x|$ 值小时吸收能量而在 $|x|$ 大时消耗能量.

李那定理的主要应用是在范德波①方程上

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0, \tag{11}$$

其中的 μ 根据物理原因假定为正的常数. 这里 $f(x)=\mu(x^2-1)$ 及 $g(x)=x$，故条件(i)显然满足. 条件(ii)也同样显然成立. 由于

$$F(x)=\mu\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)=\frac{1}{3}\mu x(x^2-3).$$

故知 $F(x)$ 在 $x=\sqrt{3}$ 处有单独一个正的零点，在 $0<x<\sqrt{3}$ 上为负，在 $x>\sqrt{3}$ 为正，且当 $x\to\infty$ 时 $F(x)\to\infty$. 最后，$F'(x)=\mu(x^2-1)$ 对于 $x>1$ 为正，故 $F(x)$ 在 $x>\sqrt{3}$ 肯定是非减的(事实上它是增函数). 于

① 范德波(Balthasar van der Pol, 1889—)是荷兰科学家，专攻无线电工程方面的理论问题，他在 20 年代首先提出了对方程(11)的研究，从而引起李那及其他人对非线性力学中的自保(self-sustained)振荡进行数学理论研究.

是定理中的所有条件都满足，故可断言方程(11)具有唯一闭合路线(周期解)，它为每一其他路线(非平凡解)所螺旋(渐近)趋近.

习 题

1. 定理 A 的一个证明可按以下的几何思想 (图 65)来作出. 设 C 是相平面的一简单闭曲线(不一定是个路线)，并设 C 不通过方程组 (1) 的任何临界点. 若 $P(x,y)$ 是 C 上一点，则

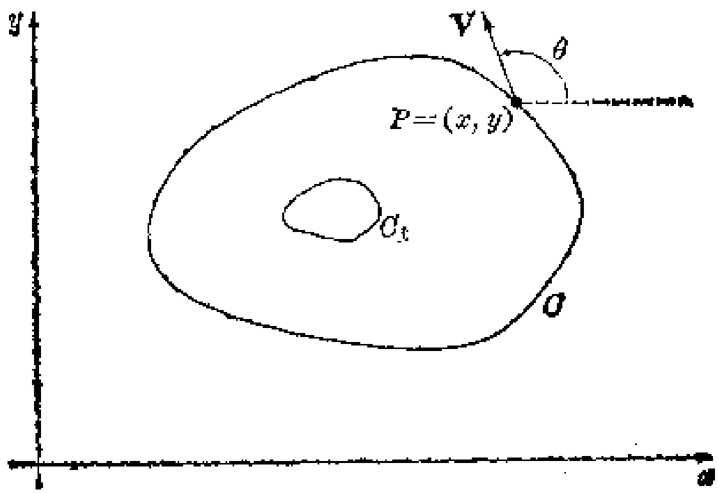


图 65

$$V(x,y)=F(x,y)i+G(x,y)j$$

是非 0 矢量，因而具有以角度 θ 表示的确定方向. 若 P 按反时针方向沿 C 移动一圈，则 θ 的改变量为 $\Delta\theta=2\pi n$，此处 n 是个正整数，0 或负整数，这个整数 n 叫 C 的指数. 若 C 连续缩成较小的简单闭曲线 C_0 而未通过任一临界点，则其指数也连续变化；而由于指数是整数，因而它不能改变.

a. 若 C 是(1)的路线，试证它的指数是 1.

b. 若 C 是(1)的不含临界点的路线，试证较小的 C_0 具有指数 0，由此推出定理 A.

2. 设有非线性自治方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x+4y-x(x^2+y^2)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-4x+4y-y(x^2+y^2).\end{cases}$$

a. 试把这方程组化为极坐标形式.

b. 应用庞加莱-本狄克生定理证明在圆 $r=1$ 及 $r=3$ 之间有一闭合路线.

c. 求原方程组的非常数通解 $x=x(t)$ 及 $y=y(t)$，并用它来求相应于闭合路线(其存在性已在(b)中证明)的周期解.

d. 试在相平面上画出闭合路线以及至少两个其他的路线.

3. 试证非线性自治方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-y-xe^{x^2+y^2}\\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y-ye^{x^2+y^2}\end{cases}$$

具有一周期解.

4. 试用本节所讲一定理确断下列各微分方程是否具有一个周期解,

a. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+(5x^4-9x^2)\dfrac{dx}{dt}+x^5=0$;

b. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-(x^2+1)\dfrac{dx}{dt}+x^5=0$;

c. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2-(1+x^2)=0$;

d. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^5-3x^3=0$;

e. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x^6\dfrac{dx}{dt}-x^2\dfrac{dx}{dt}+x=0$.

5. 试证形如

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+b(x^2-1)\frac{dx}{dt}+cx=0 \qquad (a, b, c>0)$$

的任一微分方程可通过自变量的置换化为范德波方程.

附录 A. 庞加莱

庞加莱(Jules Henri Poincare, 1854—1912) 在二十世纪初公认为当代最大数学家. 1879年, 他在 Caen 大学开始学府生涯, 才两年之后即就任 Sorbonne 大学教授, 在那里渡过他的余生, 每年讲授一门不同的课程. 在他的课堂讲授中(以后由他的学生编集出版), 他以伟大的首创精神和卓越的技巧处理了纯数学与应用数学的几乎所有领域, 以及许多他发现的以前未知的领域. 他总共写出了 30 卷以上关于数学物理与天体力学的专著, 6 卷较通俗的著作以及几乎 500 篇数学论文.

他是个敏捷、多才而且不倦的思想家，不爱在细节上纠缠，因而被他的当代人称为"一名征服者但不是殖民者"．他具有惊人的记忆力这种优点，习惯于在书房里来回走动时在脑子里搞他的数学工作，只有在心算完毕之后才把结果写下来．他在32岁这样非常年青的时候就当选为科学院院士．给他提名的那位科学院士曾说"他的工作非普通言辞所能赞誉，而不免使人想起雅可比(Jacobi)赞扬阿倍耳的话——他解决了前人所未曾梦想过的问题"．

庞加莱在数学上第一次取得的重大成就是分析方面的工作．他推广了函数的周期性而创造了自守函数的理论．初等的三角函数和指数函数是单周期的，椭圆函数是双周期的．庞加莱的自守函数是这些函数的一个很大的推广：因为它们在可数无穷多的线性分式变换下是不变的，而且把内容丰富的椭圆函数论包括在内，作为它的一个细节．他应用自守函数解代数系数的线性微分方程，且又说明怎样能利用它们来使代数曲线单值化，也就是把这种曲线上任一点的坐标表示为一个参量 t 的单值函数 $x(t)$ 及 $y(t)$．在十九世纪80年代和90年代，自守函数发展成为数学的一个广泛分支，其中牵涉到(除了分析之外)群论、数论、代数几何以及非欧几何．

他思想的另一集注点是在天体力学的研究上(《天体力学的新方法》("Les Méthodes Nouvelle de la Mécanique Céleste"，共三卷，1892—1899)．他在这项研究工作中搞出了他的渐近展开理论(这点燃了人们对发散级数的兴趣)，研究了轨道的稳定性问题，开创了非线性微分方程的定性理论．他在关于天体演化的著名研究中，促使他去研究由引力作用凝聚一起的旋转流体的平衡外形，而他所发现的梨状构形对其后G. H. 达尔文爵士(搞出进化论的那个达尔文之子)的工作起重要作用①．庞加莱在他对这些发现的总结中写道："设想有一旋转流体因冷却而收缩，但这过程足够缓慢，使流体仍为匀质而各部分的旋转

① 参看G. H. Darwin《论潮汐》("The Tides"，Chap. XVIII，1899)．

仍一样. 这物体起初非常接近球形,然后变成旋转椭球,这椭球逐渐扁下去, 然后到某一时刻它将变为具有三个不同轴的椭球. 再往后它的外形不再是椭球而将变成梨状, 直到最后这物体的"腰部"变得越来越细弱而分成两个不同而又不相等的物体". 这些思想在我们这个时代引起了新的兴趣; 因为最近地球物理学家借人造地球卫星之助发现地球本身是略呈梨形的.

他在这个时期所碰到的许多问题播下了新的思想方法的种子, 使它们在二十世纪的数学里得到成长和发扬光大. 我们已经提到过发散级数与非线性微分方程. 此外, 他由于想探究高维空间中曲线与曲面的定性本质,使他写出著名的论著《位置分析》("Analysis situs",1895),这书绝大多数专家都认为是开现代代数拓扑之头的里程碑. 他又在对周期性轨道的研究中奠立了拓扑(或定性)动力学的基础. 这方面所产生的典型数学问题, 可以拿他在 1912 年所猜测(但并未在生前得出证明)的一个定理作为例子: 若有一个一一连续变换能把两同心圆之间的环变到它自身,使面积不变, 而把内圆上的点变成顺时针方向运动, 把外圆上的点变成逆时针方向运动, 则至少必有两点是保持不变的. 这定理对古典的三体问题(还有弹子球在凸桌面上的运动)有重要应用. 它的一个证明在 1913 年由一个年青的美国数学家比克荷夫(Birkhoff)所得出①. 这方面的另一个著名发现是所谓庞加莱递归定理(Poincare recurrence theorem), 其内容是关于守恒动力系统的长期性态问题. 这个结果似可表明当时想从古典力学推出热力学第二定律之劳而无功, 而其后因此引起的争议则成为产生现代各态历经理论 (ergodic theory)的历史根源.

庞加莱在数学物理上的许多贡献中,最突出的是他在 1906 年发表的关于电子动力学的著名论文. 他曾对物理学的基础问题思索多年,

① 参看 G. D. Birkhoff《动力系统》("Dynamical Systems", Chap VI, vol. IX, 1927).

不依赖于爱因斯坦而得出了特殊相对论上的许多结果①. 主要不同之点是爱因斯坦的理论依据与光的信号有关的基本思想, 而庞加莱的理论则依据电磁学从而其应用范围限于与电磁学有关的现象. 庞加莱非常重视爱因斯坦的能力, 于 1911 年介绍他担任他的第一个高等学府职位②.

1902 年他作为一种业余爱好为更广大的公众进行写作和讲演, 以便就数学和科学的意义和对于人类的重要性, 把他自己的热忱感受介绍给非专家的读者和听众. 这些比较轻松的著作编集成四本书《科学与假设》("La Science et l'Hypothèse", 1903), 《科学的价值》("La Valeur de la Science", 1904), 《科学与方法》("Science et Méthode", 1908), 以及《最后的一些想法》("Dernières Pensces", 1913). 这些文章都很清楚, 有风趣, 深刻, 引人入胜, 表明他是第一流的法文散文大师. 这些短文中最著名的一篇是讲数学的发现, 他回顾自己, 分析自己的思路, 这样就使别人能对天才头脑里如何进行工作的情况获得罕见的一豹. 正如茹尔丹(Jourdain)在他的悼词中所说的, "他之所以会永远活在人们心里有许多原因, 其中一个原因是他既能使我们钦佩又能使我们了解他".

在目前这个时代, 据说数学知识每十年左右就增加一倍, 虽然有些人对这种积累的知识是否有长远价值持怀疑态度. 对于四大门数学, 分析, 代数, 几何与数论, 更不用说数学物理, 现在一般都认为任何凡人所能完全通晓的都不能超过一门或两门. 庞加莱对他那个时代的全部数学有创造性的掌握, 而他也许是达到这种地步的最后一个人物.

---

① Charles Scribner, Jr. 曾在《庞加莱及相对论原理》("Henri Poincaré and the Principle of Relativity")一文中论述历史背景. 该文载 Am. J. Phys., vol 32, p. 672, 1964.

② 参看 M. Lincoln Schuster 编《世界名人书信集锦》("A Treasury of the World's Great Letters", p. 453, 1940).

附录 B. 李那定理的证明

考察李那方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=0, \tag{1}$$

并设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足以下条件：(i) $f(x)$ 及 $g(x)$ 连续且有连续导数；(ii) $g(x)$ 是这样一个奇函数，对于 $x>0$ 我们有 $g(x)>0$；而 $f(x)$ 是个偶函数；(iii) 奇函数 $F(x)=\int_0^x f(x)dx$ 恰好有一正的零点在 $x=a$ 处，它在 $0<x<a$ 上为负，在 $x>a$ 上为正且非减，又当 $x\to\infty$ 时 $F(x)\to\infty$. 我们要证明方程(1)在相平面上有唯一闭合路线包围原点，且每一个其他路线在 $t\to\infty$ 时都螺旋趋近于它.

在相平面上等价于(1)的方程组是

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y.\end{cases} \tag{2}$$

根据条件(i)，关于解的存在与唯一性的基本定理是成立的．由条件(ii)，可知 $g(0)=0$ 以及 $x\neq0$ 时 $g(x)\neq0$，故原点是唯一临界点．又，我们知道任何闭合路线必须包围原点．根据

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}&=\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}+\int_0^x f(x)dx\right]\\&=\frac{d}{dt}[y+F(x)]\end{aligned}$$

这一事实，使我们想到可以引入新变量

$$z=y+F(x).$$

用这些新记号之后，方程(1)就等价于 xz 平面上的下列方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=z-F(x)\\[2mm]\dfrac{dz}{dt}=-g(x).\end{cases} \tag{3}$$

这里我们仍然有:解的存在与唯一性定理成立,原点是唯一临界点,以及任何闭合路线必包围原点. xy 平面与 xz 平面的点与点间的一一对应关系 $(x,y)\longleftrightarrow(x,z)$,在两个方向上都是连续的,因此闭合路线仍对应闭合路线,并且两个平面上路线的外形也是大致相似的. (3)的路线的微分方程是

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-g(x)}{z-F(x)}. \tag{4}$$

这些路线比原来相平面的对应路线易于分析,其原因如下.

第一,由于 $g(x)$ 及 $F(x)$ 都是奇函数,且当 x 及 z 都换成 $-x$ 及 $-z$ 时,方程(3)及(4)都不变. 这说明与一个路线对称于原点的任一曲线也是个路线. 故若已知右半平面 $(x>0)$ 里的路线,那末只要把它们对原点反射,便立即得出左半平面 $(x<0)$ 里的路线.

第二,方程(4)告诉我们,这些路线只有在它们穿过 z 轴时才变成水平的,且只有在它们穿过曲线 $z=F(x)$ 时才变成铅直的. 又,看一下(3)右边的正负号,可知在曲线 $z=F(x)$ 的上方,所有路线都指向右边;而在这曲线的下方,路线都朝左;并且按照 $x>0$ 或 $x<0$ 而知路线是朝下还是朝上描出的. 这些事实表明,路线在穿过曲线 $z=F(x)$,穿过 z 轴,以及穿过右半部曲线 $z=F(x)$ 上任一点 Q 处的铅垂线时,只能取图66中箭头所示的方向. 对于通过 Q 的路线 C,假如我们适当选取方程组(3)的确定 C 的那个解,使点 Q 相应于参量值 $t=0$. 那末,当 t 增大到正值时,C 上坐标为 $x(t)$ 及 $y(t)$ 的一点就朝下朝左移动,一直到它在点 R 处穿过 z 轴时为止;而当 t 减到负值时,C 上的点往上往左移动,一直到它在点 P 处穿过 z 轴时为止. 为讨论方便起见,可令 Q 的横坐标为 b 而把路线 C 记为 C_b.

根据路线的对称性,容易看出,当路线 C_b 越过 P 及 R 延伸到左半平面时,当且仅当 OP 及 OR 两段距离相等,结果才能成为一个闭合路线. 所以为证明存在一个唯一的闭合路线,就只要证明存在唯一的 b 值能使 $OP=OR$.

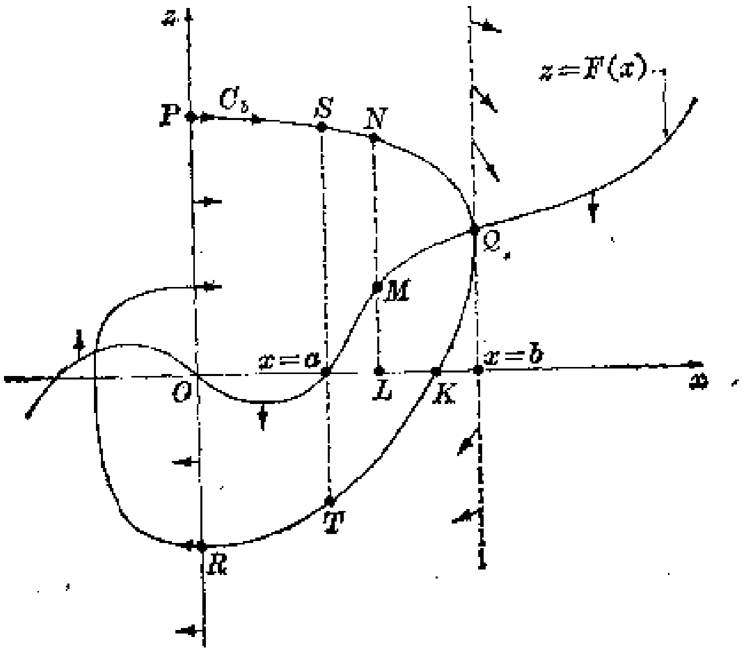


图 66

为证明此事，引入

$$G(x)=\int_0^x g(x)dx$$

并考察函数

$$E(x,z)=\frac{1}{2}z^2+G(x),$$

(它在 z 轴上变成 $z^2/2$)．沿任一路线，我们有

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}&=g(x)\frac{dx}{dt}+z\frac{dz}{dt}\\&=-[z-F(x)]\frac{dz}{dt}+z\frac{dz}{dt}\\&=F(x)\frac{dz}{dt},\end{aligned}$$

故

$$dE=Fdz.$$

若算出 Fdz 在路线 C_b 上从 P 到 R 的曲线积分，则得

$$I(b)=\int_{PR}Fdz=\int_{PR}dE=E_R-E_P=\frac{1}{2}(OR^2-OP^2),$$

因此我们只要证明存在唯一的 b 能使 $I(b)=0$.

若 $b\leqslant a$, 则 F 及 dz 为负, 故 $I(b)>0$ 从而 C_b 不可能是闭合的. 现假定 $b>a$ 如图 66 中所示那样. 我们把 $I(b)$ 分成两部份:

$$I_1(b)=\int_{PS}Fdz+\int_{TR}Fdz \text{ 及 } I_2(b)=\int_{ST}Fdz$$

以使

$$I(b)=I_1(b)+I_2(b).$$

由于当 C_b 从 P 描到 S 以及从 T 描到 R 时, F 及 dz 是负的, 显然可知 $I_1(b)>0$. 而当我们在 C_b 上从 S 描到 T 时, 我们有 $F>0$ 及 $dz<0$, 故 $I_2(b)<0$. 我们眼前的目标是通过分别考察 $I_1(b)$ 及 $I_2(b)$ 来证明 $I(b)$ 是 b 的减函数. 首先我们指出利用方程(4)可写出

$$Fdz=F\frac{dz}{dx}dx=\frac{-g(x)F(x)}{z-F(x)}dx.$$

减小 b 的结果是使 PS 弧上升并使 TR 弧下降, 这就会使 $[-g(x)F(x)]/[z-F(x)]$ 在 0 与 a 间一个给定点 x 处的值减小. 由于 $I_1(b)$ 里的积分限是固定的, 结果这就使 $I_1(b)$ 的值减小. 又因 $F(x)$ 在 a 以右为正且是非渐减的, 故知 b 的增大将使正数 $-I_2(b)$ 增大, 从而使 $I_2(b)$ 减小. 于是当 $b\geqslant a$ 时 $I(b)=I_1(b)+I_2(b)$ 是个渐减函数. 现在我们证明当 $b\to\infty$ 时 $I_2(b)\to-\infty$. 若图 66 中的 L 是固定的而 K 在 L 右边, 则

$$I_2(b)=\int_{ST}Fdz<\int_{NK}Fdz\leqslant-(LM)\cdot(LN);$$

而由于当 $b\to\infty$ 时 $LN\to\infty$, 故有 $I_2(b)\to-\infty$.

因此, 当 $b\geqslant a$ 时 $I(b)$ 是 b 的渐减连续函数, $I(a)>0$, 且当 $b\to\infty$ 时 $I(b)\to-\infty$. 由此可知必有而且只有一个 $b=b_0$ 能使 $I(b)=0$, 从而知道必有而且只有一个闭合路线 C_{b_0}.

最后我们指出当 $b<b_0$ 时 $OR>OP$; 由此以及由路线的对称性可知 C_{b_0} 之内的路线是朝外卷向 C_{b_0} 的. 同样, 由 $b>b_0$ 时 $OR<OP$ 这一事实可知 C_b 之外的路线也是卷向 C_{b_0} 的.

第九章　变　分　法

47. 前言. 变分法的一些典型问题

变分法是两个多世纪以来分析里的一大分支. 它是很有功效的工具，能用来解决代数学上许多种不同的问题，也能以非常简洁优雅的形式来表达数学物理中的基本原理.

这门学科的特殊风味可以用几个典型问题来说明. 设给定平面上两点 P 及 Q(图 67). 可以有无穷多曲线连接这两点，而我们可以问其

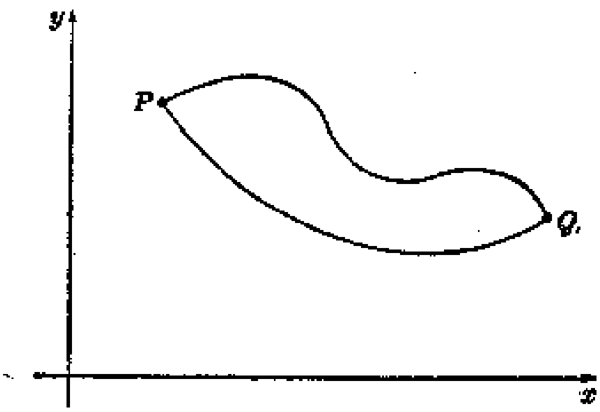


图　67

中哪个曲线最短. 凭直观作出的回答显然是直线. 我们也可以问哪个曲线绕 x 轴转出的旋转曲面面积最小，而在这情形下的回答就远远不能明确. 如果我们把这样一根典型的曲线看作是铅直平面中的一根光滑无摩擦力的细丝，那末要找出什么样的曲线能使一个串珠从 P 滑到 Q 所需的时间最短，这又是一个并不显然可知的问题. 这是约翰·伯努利提出的著名速降线问题，在第 6 节里曾经讨论过的. 对这类问题能得出直观回答的情形是很罕见的，而变分法则提供一种处理这类问题的通用分析方法.

学过初等微积分的每个学生都熟知怎样求一元函数的极大值或极小值. 从以上几个问题可以看出，在变分法里考虑的是依赖于整个曲

线的某个量(弧长,曲面积,下落时间),而我们要求使所论量取极小值的那个曲线. 变分法里也处理依赖于曲面的极小问题. 例如,若把一圈铁丝弯成任意形状后浸入肥皂水,那末绷在铁丝上的皂膜将取面积最小的形状. 在数学上这就是从这一极小性质以及铁丝的已知形状求出曲面.

此外,变分法在统一力学观点以及用数学解释许多物理现象方面也起重要的作用. 例如,若一组运动质点的构形由其彼此间的引力决定,则发现它们的实际运动路线,将是使该系统的动能与势能之差对于时间的积分取极小值的那个曲线. 古典力学中这一影响深远的命题,以其发现者的名字命名,叫做哈米尔顿原理. 又,在近世物理学中,爱因斯坦在其广义相对论的研究中大量运用变分法,而薛定谔则利用它发现著名的波动方程——量子力学的基础之一.

变分法中的少数几个问题是很老的,早就为古代希腊人所考察过并部分地得到解决. 牛顿和莱布尼茨发明微积分后曾激起人们研究一些变分法问题,其中有些已用巧妙的特殊方法得到解决. 然而欧拉在1774年发现极小曲线的基本微分方程之后,这门学科就开始成为分析中的一个自成体系的分支.

我们将在下一节讨论欧拉的方程,但在这里先要指出,本节第二段里所讲过的那几个问题,都是下面这个较一般问题的特例. 设P及Q的坐标为(x_1, y_1)及(x_2, y_2),我们考察满足边界条件$y(x_1)=y_1$及$y(x_2)=y_2$的函数族

$$y=y(x). \tag{1}$$

也就是,(1)的曲线图形必须连接P及Q. 然后我们要找这个函数族里能使下列积分取极小值的那个函数$y(x)$:

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx. \tag{2}$$

为看出这个问题确实包含其他几个问题,我们指出曲线(1)的弧长是

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx, \tag{3}$$

又曲线绕 x 轴旋转而成曲面的面积是

$$\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \tag{4}$$

至于在速降曲线的情形，较为方便的做法是像图 68 中那样把坐标系倒过来并取点 P 为原点. 因为速度 $v=\dfrac{ds}{dt}$ 由 $v=\sqrt{2gy}$ 给出，所以整个下降时间是 ds/v 的积分，故需取极小值的积分是

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx. \tag{5}$$

于是，(2)中的函数 $f(x, y, y')$ 在三个具体问题里分别有 $\sqrt{1+(y')^2}$，$2\pi y\sqrt{1+(y')^2}$ 及 $\sqrt{1+(y')^2}/\sqrt{2gy}$ 这样的形式.

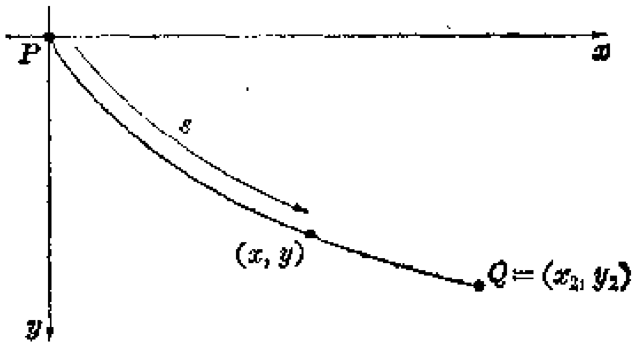


图 68

使积分(2)取极小值这个基本问题，现在有必要提得稍加明确些. 第一，我们总假定函数 $f(x,y,y')$ 具有对于 x, y 及 y' 的二阶连续偏导数. 第二个问题是，什么样的函数(1)是可取的？积分(2)在被积函数为 x 的一个连续函数时总是个确定的实数，为此，我们只要假定 $y'(x)$ 连续就行了. 然而，为保证我们所要做的运算合法，莫如在这里一劳永逸地把所考虑的未知函数 $y(x)$，限制为具有连续二阶导数且满足边界条件 $y(x_1)=y_1$ 及 $y(x_2)=y_2$ 的函数，这样的函数将称为是**容许的**. 我们可以设想只取这类容许函数后的一种竞争状态，而问题就变为从这函数族里挑选能使 I 取极小值的某个或几个函数.

尽管讲了这些条件，我们并不打算太注重数学严格性问题，我们

的观点是特意要讲得直观些，我们的目的是要尽可能快而又简单地接触到有趣的应用．读者如想探索这学科的内容很广泛的理论，可参考一些现成的系统论著①．

48．极值线的欧拉微分方程

假定存在一个容许函数 $y(x)$ 使积分

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx \tag{1}$$

取极小值，那末怎样来求这个函数呢？我们将把对应于相邻容许函数的 I 值进行比较，以得出 $y(x)$ 的一个微分方程．这里的中心思想是，$y(x)$ 既能使 I 取极小值，则若使 $y(x)$ 稍受"扰动"就会使 I 增大．这些受扰动后的函数可按下法作出．

设 $\eta(x)$ 是任一具下列性质的函数：$\eta''(x)$ 连续且

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0. \tag{2}$$

若 α 是个小参量，则

$$\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x) \tag{3}$$

表示一个单参量容许函数族．这族中的一根曲线与极小曲线 $y(x)$ 的铅直方向偏离是 $\alpha\eta(x)$，如图 69 所示②．(3)的意义在于，对每一个这样的函数族，换言之对每一个所选取的函数 $\eta(x)$ 而言，极小函数 $y(x)$ 都属于该族，而且它对应于参量 $\alpha=0$ 的值．

现在取定了 $\eta(x)$ 之后，把 $\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$ 及 $\bar{y}'(x)=y'(x)+\alpha\eta'(x)$ 代入积分(1)，得出 α 的一个函数

---

① 例如参看 I. M. Gelfand and S. V. Fomin《变分法》("Calculus of Variations", 1963)；G. M. Ewing《变分法及其应用》("Calculus of Variations with Applications", 1969)；或 C. Carathéodory.《变分法及一阶偏微分方程．第二部分：变分法》("Calculus of Variations and Partial Dif. Eqs. of the 1st Order. Part II: Calculus of Variations", 1967)．

② 差 $\bar{y}-y=\alpha\eta$ 叫函数 y 的变分，记为 δy．这种记法可加以发挥，使之成为一套有用的形式算法(这里不拟细谈)，并且它也是变分法这个名称的来源．

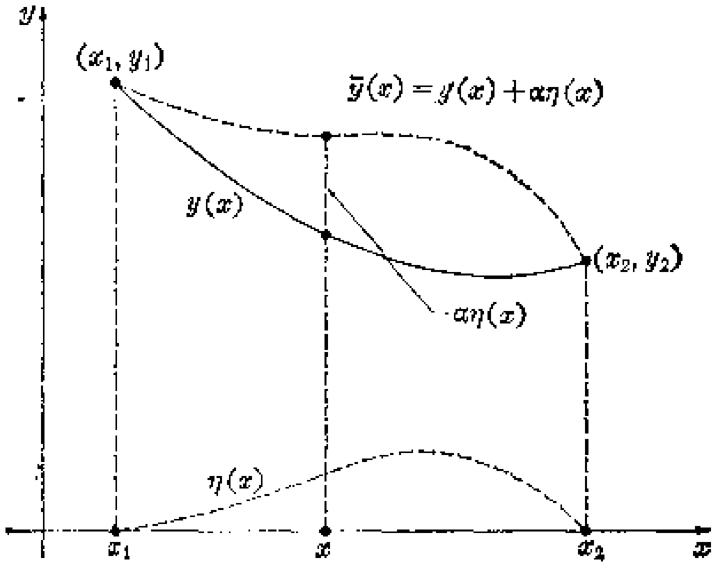


图 69

$$
\begin{aligned}
I(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}, \bar{y}')\,dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x)+\alpha\eta(x), y'(x)+\alpha\eta'(x)]dx.
\end{aligned} \tag{4}
$$

当 $\alpha=0$，从公式(3)得出 $\bar{y}(x)=y(x)$；但由于 $y(x)$使积分取极小值，故知 $I(\alpha)$ 必在 $\alpha=0$ 时有一极小值．根据初等微积分可知出现这一情况的必要条件是导数 $I'(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 时为 0：$I'(0)=0$．导数 $I'(\alpha)$ 可从(4)的积分号下求导而得出，即

$$
I'(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}')\,dx. \tag{5}
$$

根据多元函数求导的链式法则，我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}') &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}\frac{\partial\bar{y}'}{\partial\alpha} \\
&= \frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}\eta'(x),
\end{aligned}
$$

故(5)可写为

$$
I'(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}\eta'(x)\right]dx. \tag{6}
$$

但 $I'(0)=0$，故若在(6)中令 $\alpha=0$ 便得出

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right]dx=0. \tag{7}$$

这个方程里导数 $\eta'(x)$ 与函数 $\eta(x)$ 一起出现. 我们可以对第二项进行分部积分以消去 $\eta'(x)$, 这就得出

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)dx=\left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

$$=-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

(右边第一项之所以等于 0 是由于(2)). 于是可把(7)写成

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]dx=0. \tag{8}$$

到这里为止, 我们推理过程中的函数 $\eta(x)$ 是取定了的. 然而由于(8)中的积分必须对每一个这样取定的函数都等于 0, 故立即可推断方括号里的式子也必须等于 0. 这就得出

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0, \tag{9}$$

它便是**欧拉方程**①.

读者必须对我们这个结论的确切性质有清楚的了解, 这就是: 若 $y(x)$ 是能使积分(1)取极小值的容许函数, 那末 y 满足欧拉方程. 现假定能求出满足这微分方程的一个容许函数 y. 这是不是表明 y 就能使 I 取极小值? 不一定. 这跟初等微积分里的情况相似, 在那里一个函数 $g(x)$ 如果它的导数在点 x_0 等于 0, 就可能在 x_0 处有一极大, 一极小或一拐点. 如果不加区别, 这三种情形常统称是 $g(x)$ 的**驻值**, 而出现驻值处的点 x_0 叫**驻点**. 同样, 条件 $I'(0)=0$ 也完全可以表明 $I(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 处有一极大或一拐点而不是极小. 因此, 通常把欧拉方程的任一容许

① 导出(9)的更详细的间接论证法如下: 假定(8)方括号里那个函数在区间内某点 $x=a$ 处非 0(比方说是正数). 由于这是个连续函数, 故它在 $x=a$ 附近的某个子区间上都是正的. 现取 $\eta(x)$ 为在该子区间上为正而在其外为 0 的一个函数. 对于这个 $\eta(x)$, (8)中的积分将是正的, 这就得出矛盾. 若把这论证正式陈述, 所得命题叫做**变分法的基本引理**.

解称为驻函数或驻曲线，把积分(1)的对应值叫做这积分的一个驻值，而并不负责说明实际出现的是几种可能情形中的那一种．又，欧拉方程的解在未受边界条件限制前叫做极值曲线．

在微积分里，我们利用二阶导数给出充分条件，来区别出驻值中所包含的各种情形．在变分法里也有类似的充分条件，但因这些条件相当复杂，我们不拟在这里考虑．在实际做的时候，所论问题中的几何或物理情况，常能使我们确定一个特定驻函数使积分取极大或极小值（或者都不是）．有志于钻研充分条件以及其他理论问题的读者，可在第47节所介绍的参考书里找到充分的讨论．

欧拉方式(9)照目前所写的形式是不太能说明问题的．为说明它的意义并把它变成一种有用的工具，我们先强调指出，在计算偏导数 $\partial f/\partial y$ 及 $\partial f/\partial y'$ 时，我们是把 x, y, 及 y' 都当作自变量来看待的．然而在一般情形下，$\partial f/\partial y'$ 既是 x 的显函数，并且还通过 y 及 y' 是 x 的隐函数，故(9)中第一项可写成展开的形式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{dy'}{dx},$$

于是欧拉方程是

$$f_{y'y'}\frac{d^2y}{dx^2}+f_{yy'}\frac{dy}{dx}+(f_{y'x}-f_y)=0. \tag{10}$$

除非 $f_{y'y'}=0$，这是个二阶方程，故极值曲线((10)的解)一般是双参量曲线族；而从中选取的驻函数是使其两个参量能适合所给边界条件的．象(10)那样的一个二阶非线性方程通常是不可能求解的，但幸而许多应用问题会导致一些可以求解的特殊情形．

情形A． 若函数 f 中没有 x 及 y，则欧拉方程变为

$$f_{y'y'}\frac{d^2y}{dx^2}=0;$$

而若 $f_{y'y'}\neq 0$，便有 $d^2y/dx^2=0$，于是 $y=c_1x+c_2$，故极值线是一切直线．

情形B． 若函数 f 中没有 y，则欧拉方程变为

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0,$$

而这可以立即积分得出表示极值曲线的一阶方程

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=c_1.$$

情形C. 若函数 f 中没有 x，则可把欧拉方程积出为

$$\frac{\partial f}{\partial y'}y'-f=c_1.$$

这个结果是从下列恒等式推出的:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y'-f\right)=y'\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\right]-\frac{\partial f}{\partial x},$$

上式右边等于0，因为 $\partial f/\partial x=0$，而方括号里的式子根据欧拉方程也等于0.

现在我们应用这套方法来解第47节里所列出的三个问题.

例1. 为求连接两点 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 的最短曲线(根据直观我们知道是直线)，必须使弧长积分

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

取极小值. $f(y')=\sqrt{1+(y')^2}$ 里没有变量 x 及 y，所以这个问题属于情形A. 由于

$$f_{y'y'}=\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=1/[1+(y')^2]^{3/2}\neq 0,$$

故由情形A可知极值曲线是双参量直线族 $y=c_1x+c_2$. 利用边界条件，得出驻曲线为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1), \tag{11}$$

这当然就是连接两点的直线. 必须指出，这个分析只告诉我们：若 I 有一驻值，则相应的驻曲线必为直线(11). 然而从几何关系显然可知没有能使 I 取极大值的曲线，但确实存在使它取极小值的曲线，故由此判断(11)确是连接所给两点的最短曲线.

在这个例子里我们通过解析方法得出一个显然的结论．比这难得多而又有趣的一个问题，是求联接给定曲面上两固定点又全部位于曲面上的曲线．这些曲线叫**测地线**，而对测地线性质的研究是微分几何这个数学分支中的主要问题之一．

例 2. 为求连接点$(x_1、y_1)$及(x_2, y_2)的这样一个曲线，使其绕x轴旋转而成曲面有极小面积，我们必须取

$$I=\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx \tag{12}$$

的极小值．在$f(y, y')=2\pi y\sqrt{1+(y')^2}$里没有变量$x$，故情形 C 告诉我们欧拉方程变为

$$\frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}-y\sqrt{1+(y')^2}=c_1,$$

化简后成为

$$c_1y'=\sqrt{y^2-c_1^2}.$$

分离变量并积分，得到

$$x=c_1\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-c_1^2}}=c_1\log\left(\frac{y+\sqrt{y^2-c_1^2}}{c_1}\right)+c_2,$$

解出y后得到

$$y=c_1\cosh\left(\frac{x-c_2}{c_1}\right). \tag{13}$$

因此极值曲线是悬链线，而所要求的极小曲面(如果存在的话)必由悬链线旋转而成．其次一个问题是看看是否确实能适当选取参量c_1及c_2之值，使曲线(13)能连接点(x_1, y_1)及(x_2, y_2)．

选取这两个参量值的问题结果发现是怪复杂的．若让曲线(13)通过第一个点(x_1, y_1)，则尚剩下一个参量之值未定．我们在图 70 中画出了这单参量曲线族中的两个曲线．可以证明，所有这样的曲线都同虚线画出的C相切，故这曲线族中没有一个曲线是穿过C的．因此，当第二点(x_2, y_2)在C之下时(如图 70 所示的情形)，就不存在通过两点的悬链线，因而不存在驻函数．在这一情形下，我们发现，当曲线愈来

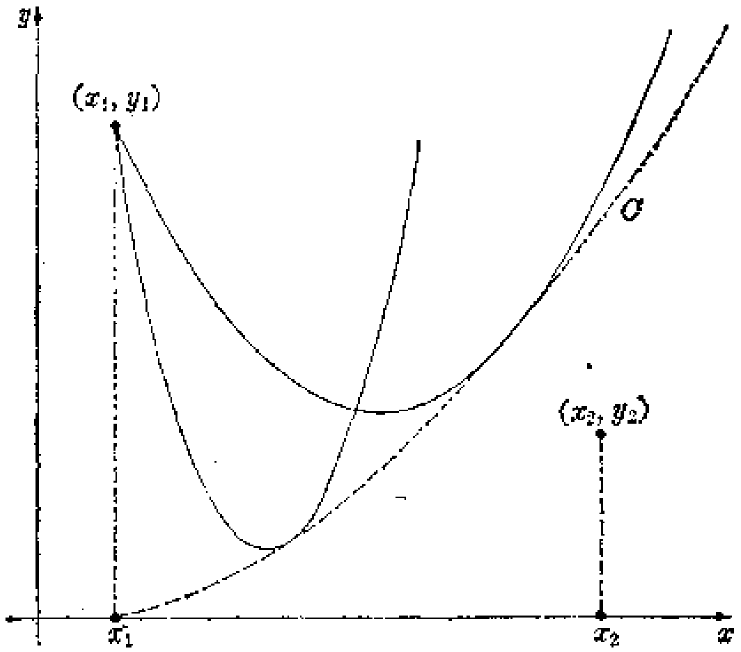


图　70

愈接近于从(x_1, y_1)到$(x_1, 0)$到$(x_2, 0)$到(x_2, y_2)这个用虚线画出的折线时，它所转出的曲面就愈来愈小，因而没有一个容许曲线能转出极小曲面．当第二个点也在C之上时，可有两个悬链线通过这两点，从而有两个驻函数，但只有上面那个悬链线转成极小曲面．最后，当第二点正好在C上时只有一个驻函数，但它并不转成极小曲面①.

例 3. 为求图 68 所示的速降线，必须让

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

取极小值．这里函数$f(y, y')=\sqrt{1+(y')^2}/\sqrt{2gy}$中也没有$x$，故由情形 C 知欧拉方程变为

$$\frac{(y')^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}}-\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}=c_1.$$

这可化简为

① 对于这些问题的完整讨论以及证明可参阅 G. A. Bliss《变分法》第四章("Calculus of Variations."chap. IV, Carus Monograph no 1, Mathematical Association of America, 1925).

$$y[1+(y')^2]=c,$$

它正好就是以前讨论这个著名问题时得出的微分方程 6-(4). 它的解在第 6 节中给出. 所得驻曲线是摆线

$$x=a(\theta-\sin\theta) \text{及} y=a(1-\cos\theta), \tag{14}$$

这是由半径为 a 的圆在 x 轴下滚动产生的, 其中所取的 a 应使第一个倒拱弧通过图 68 中的点(x_2, y_2). 同以前一样, 这个论证只不过说明, 若 I 有一极小值, 则相应的驻曲线必为摆线(14). 然而从物理情况来考虑, 我们相当清楚地知道, I 不可能有使它取极大值的曲线, 而确实具有使它取极小值的曲线, 因此这摆线确实是使下降时间取极小值的曲线.

在结束这一节时, 我们对积分 (1) 的处理作一个容易而重要的推广. 积分(1)代表最简单的一类变分法问题, 因它只含一个未知函数. 但在底下要碰到的一些问题并不如此简单, 因为它们会引出取决于两个或更多个未知函数的积分.

例如, 设我们要求出两个函数 $y(x)$及 $z(x)$能使积分

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z')dx \tag{15}$$

取驻值的必要条件, 其中边界值 $y(x_1)$, $z(x_1)$及 $y(x_2)$, $z(x_2)$ 是预先规定的. 我们仍照以前那样引入函数 $\eta_1(x)$及 $\eta_2(x)$, 让它们具有连续的二阶偏导数且在端点处等于 0. 由此作出邻近函数$\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta_1(x)$及 $\bar{z}(x)=z(x)+\alpha\eta_2(x)$, 然后考察由下式所定义的 α 的函数

$$I(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y+\alpha\eta_1, z+\alpha\eta_2, y'+\alpha\eta_1', z'+\alpha\eta_2')dx. \tag{16}$$

这里, 若 $y(x)$及 $z(x)$是驻函数, 我们仍必须有 $I'(0)=0$, 于是通过计算(16)的导数并令 $\alpha=0$, 得到

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta_1+\frac{\partial f}{\partial z}\eta_2+\frac{\partial f}{\partial y'}\eta_1'+\frac{\partial f}{\partial z'}\eta'_2\right)dx=0,$$

若将含 η_1' 及 η_2' 的积分进行分部积分, 上式变为

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\eta_1(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]+\eta_2(x)\left[\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right]\right\}dx=0. \tag{17}$$

最后，由于(17)必须对所选取的一切函数 $\eta_1(x)$以及 $\eta_2(x)$都成立，故立即推出欧拉公式

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0 \text{ 及 } \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)-\frac{\partial f}{\partial z}=0, \tag{18}$$

所以为求出这个问题的极值曲线就必须解方程组(18)．不规则的方程组自然比一个方程难解；但若(18)能解，则可使所得的解适合给定的边界条件来确定驻函数．对于含两个以上未知函数的像(15)那样的积分，也可用类似的方式加以处理．

习 题

1. 求积分(1)的极值曲线，若其中的被积函数是

   a. $\dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}$;

   b. $y^2-(y')^2$.

2. 求

$$\int_0^4 [xy'-(y')^2]dx$$

   的由边界条件 $y(0)=0$ 及 $y(4)=3$ 决定的驻函数．

3. 当(1)中的被积函数具有形式

$$a(x)(y')^2+2b(x)yy'+c(x)y^2$$

   时，试证欧拉方程是个二阶线性方程．

4. 若 P 及 Q 为平面上二点，则从 P 到 Q 的一个曲线的弧长，用极坐标表示的式子是

$$\int_P^Q ds=\int_P^Q \sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}.$$

   试让这积分取极小值以求一直线的极坐标方程：

   a. 取 θ 为自变量；

   b. 取 r 为自变量．

5. 考察球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的两点 P 及 Q，并用球坐标 θ 及 ϕ 来作这曲面上一点的坐标，其中 $x=a\sin\phi\cos\theta$, $y=a\sin\phi\sin\theta$, $z=a\cos\phi$．设 $\theta=F(\phi)$是位于曲面上且连接 P 与 Q 的一个曲线．试证这样一个最短的曲线(测地线)是大圆上的一段弧，也就是说，这曲线位于通过球心的平面上．提示：把曲线

长度写为

$$\int_P^Q ds=\int_P^Q \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

$$=a\int_P^Q \sqrt{1+\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2\sin^2\phi}\ d\phi,$$

从相应的欧拉方程解出 θ，再把所得结果化成直角坐标的式子.

6. 试证正圆锥面 $z^2=a^2(x^2+y^2)$，$(z\geqslant 0)$ 上的任一测地线具有下列性质：若把锥面沿一生成线剖开后展平，则测地线变成一直线. 提示：用参量方程表锥面

$$x=\frac{r\cos(\theta\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}},\qquad y=\frac{r\sin(\theta\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$z=\frac{ar}{\sqrt{1+a^2}};$$

证明参量 r 及 θ 代表展平锥面上的普通极坐标；并证明一测地线 $r=r(\theta)$ 是用这些极坐标表示的直线.

7. 若把曲线 $y=g(z)$ 绕 z 轴旋转，则所得旋转曲面的方程是 $x^2+y^2=g(z)^2$. 这曲面的一个简便的参量表示式是

$$x=g(z)\cos\theta,\quad y=g(z)\sin\theta,\quad z=z,$$

这里 θ 是 xy 平面中的极角. 试证这曲面上的一个测地线 $\theta=\theta(z)$ 的方程是

$$\theta=c_1\int\frac{\sqrt{1+[g'(z)]^2}}{g(z)\sqrt{g(z)^2-c_1^2}}dz+c_2.$$

8. 若题 7 中的旋转曲面是正圆锥面，试证其形如 $\theta=\theta(z)$ 的每个测地线为一螺线或一母线(锥面生成线).

49. 等周问题

古代希腊人提出过求给定长度闭曲线包围最大面积的问题. 他们称这为**等周问题**，并能以多少带点严格性的方式证明显然的解答——圆——是正确的①. 若曲线用参量式表示为 $x=x(t)$ 及 $y=y(t)$，且当 t 从 t_1 增大到 t_2 时曲线按反时针方向描出一周，则知所围面积为

---

① 参看 B. L. van der Waerden《科学启蒙》("Science Awakening", pp. 268—269)；以及 G. Polya《数学中的归纳与类比》("Induction and Analogy in Mathematics", chap. 10).

$$A=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt, \tag{1}$$

这是个依赖于两个未知函数的积分①．由于曲线长度是

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt, \tag{2}$$

所以我们的问题是使(1)取极大值而附加条件：必须使(2)有常数值．通常我们把等周问题扩展为能包含这样的一般问题：求一个积分的极值曲线，而限定它必须使第二个积分取指定的值．

我们也要考察有限形式的附加条件，也就是不含积分或导数的附加条件．例如，若

$$G(x,y,z)=0 \tag{3}$$

是给定的曲面，则此曲面上的一个曲线可由参量表示的满足(3)的三个函数 $x=x(t)$，$y=y(t)$，以及 $z=z(t)$来确定，而求测地线的问题就相当于在附加条件(3)下，使弧长积分

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \tag{4}$$

取极小值的问题．

拉格朗日乘子 首先必须考察一下初等微积分里很类似等周问题的一些问题．例如，假设我们要求出使函数 $z=f(x,y)$取驻值的点(x,y)，但其中 x 及 y 不是彼此独立的变量，而是受制于一个附加条件

$$g(x,y)=0. \tag{5}$$

通常的做法是任意指定(5)中变量 x 及 y 之一，比方说是 x，作为自变量，而以另一个作为因变量，因而$\frac{dy}{dx}$可从

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

算出．接着就利用这样一个事实：因 z 现在可以看作只是 x 的函数，故 $dz/dx=0$ 是 z 具有一驻值的必要条件，故

① 公式(1)是格林定理的一个特例．又参看习题1．

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}=0. \tag{6}$$

把(5)及(6)联立求解，便得所需的点(x, y)①.

这种做法的一个缺点是，问题中的变量本来是对称出现的，但处理时却并不把它们对称看待. 这同一个问题可用一种不同而较优雅的方法来处理，并且它在实际做的时候也有许多优点. 我们做出下列函数

$$F(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda g(x, y),$$

并利用下面的必要条件来考察它的无附加条件的驻值：

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}&=g(x, y)=0.\end{aligned} \tag{7}$$

若从头两个方程中消去λ，这方程组显然化为

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}=0 \quad 及 \quad g(x, y)=0,$$

而这就是上段所得的方程组. 应该指出，用这方法(从方程组(7)解x及y)解给定的问题，在理论工作上有两大特点：它无需任意选定自变量而扰动原来问题中的对称性；它只付出引用新变量λ这个较小的代价而除掉了附加条件. 参量λ叫拉格朗日乘子，而这个方法就叫拉格朗日乘子法②. 这种讨论方法显然易于推广到有多元函数以及好几个附加条件的问题上去.

积分形式的附加条件. 这里我们要寻求的是，函数$y(x)$必须满足什么

---

① 在很简单的情形下，当然可从(5)把y作为x的函数解出，以之代入$z=f(x, y)$，使z成为x的一个显函数；之后就只要算出dz/dx，解方程$dz/dx=0$并求出相应的y.

② 本章附录A里给出了拉格朗日的略传.

样的微分方程，才能使积分

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx \tag{8}$$

取驻值，同时其中的 y 适合附加条件

$$J=\int_{x_1}^{x_2} g(x,y,y')dx=c \tag{9}$$

且在端点处取预先指定的值 $y(x_1)=y_1$ 及 $y(x_2)=y_2$. 象以前那样，假定 $y(x)$确实是个驻函数，而我们使它稍稍偏离一下，从而来求出所要的解析条件. 但是这个问题不能用我们早先通过考虑形如 $\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$的邻近函数那种方法来处理，因为一般说这些邻近函数不会使第二个积分 J 保持原来的常数值 c. 我们却要考虑一个双参量的邻近函数族

$$\bar{y}(x)=y(x)+\alpha_1\eta_1(x)+\alpha_2\eta_2(x), \tag{10}$$

其中 $\eta_1(x)$及 $\eta_2(x)$具有连续二阶导数且在端点处为 0. 参量 α_1 及 α_2 并不彼此独立而是有下列条件相连系

$$J(\alpha_1,\alpha_2)=\int_{x_1}^{x_2} g(x,\bar{y},\bar{y}')dx=c. \tag{11}$$

于是我们的问题就化成：求出使函数

$$I(\alpha_1,\alpha_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,\bar{y},\bar{y}')dx \tag{12}$$

在 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 处有驻值的必要条件是什么，而 α_1 及 α_2 须满足(11). 现在这样的情况正适合采用拉格朗日乘子法. 于是我们引入函数

$$\begin{aligned} K(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)&=I(\alpha_1,\alpha_2)+\lambda J(\alpha_1,\alpha_2)\\ &=\int_{x_1}^{x_2} F(x,\bar{y},\bar{y}')dx, \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$F=f+\lambda g,$$

然后利用必要条件

$$\frac{\partial K}{\partial\alpha_1}=\frac{\partial K}{\partial\alpha_2}=0 \qquad (\text{其中 } \alpha_1=\alpha_2=0) \tag{14}$$

来考察K在$\alpha_1=\alpha_2=0$处的无附加条件的驻值. 将(13)在积分号下求导并利用(10),得到

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i}=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}}\eta_i(x)+\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'}\eta_i'(x)\right]dx \qquad (i=1,2);$$

令$\alpha_1=\alpha_2=0$,则由于(14),得出

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta_i(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta_i'(x)\right]dx=0.$$

对第二项进行分部积分之后,上式变为

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta_i(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx=0. \tag{15}$$

由于$\eta_1(x)$及$\eta_2(x)$都是任意函数,故(15)中所含两个条件实际只等于一个条件,于是我们仍然可以断定驻函数$y(x)$必须满足欧拉方程

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0. \tag{16}$$

这个方程的解(所论问题的极值曲线)中含有三个待定参量: 两个积分常数以及拉格朗日乘子λ. 然后我们对这些极值曲线加上两个边界条件并使积分J取指定的值c,以便从极值曲线中选取驻函数.

在积分依赖于两个或更多个函数的情形下,这个结果也可以照上节中那样来推广. 例如,若

$$I=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,z,y',z')dx$$

具有满足附加条件

$$J=\int_{x_1}^{x_2}g(x,y,z,y',z')dx=c$$

的驻值,则驻函数$y(x)$及$z(x)$必须满足方程组

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \qquad 及 \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial F}{\partial z}=0, \tag{17}$$

其中$F=f+\lambda g$. 推理过程同已经讲过的相似,其详从略.

例1. 我们要求这样的一个曲线,它有固定的长度L,连接点(0, 0)及(1, 0),位于x轴之上,且在它与x轴之间包围的面积极大. 这是带附

加条件的原来那个等周问题，其中包围极大面积的一部分曲线是长度为 1 的直线段．这个问题是要使$\int_0^1 y dx$取极大值，但须满足附加条件

$$\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = L$$

及边界条件 $y(0)=0$ 与 $y(1)=0$．这里我们有 $F=y+\lambda\sqrt{1+(y')^2}$，故欧拉方程是

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)-1=0, \tag{18}$$

做出求导运算后，这就是

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\frac{1}{\lambda}. \tag{19}$$

这里我们无需进行积分，因为(19)明白告诉我们曲率是常数且等于 $1/\lambda$．由此可知使所围面积取极大值的曲线，是半径为 λ 的圆上的弧(正如可以料想到的)．若换一种方法来做，可把(18)积分，得出

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{x-c_1}{\lambda}.$$

从这解出 y' 并再积分，得到

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2, \tag{20}$$

这当然就是半径为 λ 的圆的方程．

例 2. 例 1 中显然必须有 $L>1$．又若 $L>\pi/2$，则(20) 所确定的圆弧不会作为 x 的单值函数定出 $y>0$．我们可以避免这些不自然的问题，只要考虑参量式的曲线 $x=x(t)$ 及 $y=y(t)$，转而注意原来的等周问题，这就是使

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt$$

(其中 $\dot{x}=dx/dt$ 及 $\dot{y}=dy/dt$)在附加条件

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=L$$

下取极大值的问题．这里我们有

$$F=\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2},$$

于是欧拉方程(17)是

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}y+\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)-\frac{1}{2}\dot{y}=0$$

及

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)+\frac{1}{2}\dot{x}=0.$$

这两个方程可以直接积分，得出

$$-y+\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=-c_1 \quad 及 \quad x+\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=c_2.$$

若从上式解出 $x-c_2$ 及 $y-c_1$，平方，相加，结果便得

$$(x-c_2)^2+(y-c_1)^2=\lambda^2.$$

故使积分取极大值的曲线是一圆. 这个结果可表述为下列方式：若包围面积 A 的闭平面曲线的长度是 L，则 $A\leqslant L^2/4\pi$，这里的等号当且仅当曲线为圆时成立. 这样的一个关系式叫等周不等式①.

有限形式的附加条件. 在本节开头，我们提出了在给定曲面

$$G(x,y,z)=0 \tag{21}$$

上求测地线的问题. 现在我们考察稍许一般的问题，这就是求曲面(21)上的一个空间曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$，使积分

$$\int_{t_1}^{t_2}f(\dot{x},\dot{y},\dot{z})\,dt \tag{22}$$

取驻值.

我们的策略是要把附加条件(21)去掉，为此可以如下进行. 不失一般性，可假定所求曲线位于 $G_z\neq 0$ 的那部分曲面上. 在那里，我们可从(21)解出 z 得 $z=g(x,y)$，于是

$$\dot{z}=\frac{\partial g}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial g}{\partial y}\dot{y}. \tag{23}$$

① 学物理的读者有兴趣的话可参看 G. Polya and G. Szegö《数学物理中的等周不等式》("Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics", 1951).

把(23)代入(22)后，问题就化成求积分

$$\int_{t_1}^{t_2} f\left(\dot{x}, \dot{y}, \frac{\partial g}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial g}{\partial y}\dot{y}\right)dt$$

的不带附加条件的驻函数．从上一节可知，对于这个问题，欧拉方程48-(18)是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}+\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\frac{\partial g}{\partial x}\right)-\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial x}=0$$

及

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}+\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\frac{\partial g}{\partial y}\right)-\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial y}=0.$$

由(23)知

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \quad \text{及} \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial y}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

故可把欧拉方程写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\partial g}{\partial x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\right)=0 \quad \text{及} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\right)=0.$$

现若定义一函数 $a(t)$如下

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\right)=\lambda(t)G_z, \tag{24}$$

并利用关系式 $\partial g/\partial x=-G_x/G_z$ 及 $\partial g/\partial y=-G_y/G_z$，则欧拉方程变为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)=\lambda(t)G_x \tag{25}$$

及

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)=\lambda(t)G_y. \tag{26}$$

于是有驻值的一个必要的条件是存在一个函数 $\lambda(t)$满足(24)，(25)及(26)、消去 $\lambda(t)$后，得出对称方程

$$\frac{(d/dt)(\partial f/\partial \dot{x})}{G_x}=\frac{(d/dt)(\partial f/\partial \dot{y})}{G_y}=\frac{(d/dt)(\partial f/\partial \dot{z})}{G_z}, \tag{27}$$

它同(21)一起可确定我们这个问题里的极值曲线．值得指出的一件事

是，方程(24)，(25)及(26)可以看作是求积分

$$\int_{t_1}^{t_2}[f(\dot{x},\dot{y},\dot{z})+\lambda(t)G(x,y,z)]dt$$

的不带附加条件的驻函数时的欧拉方程．这同附加条件为一积分时的结论非常相似，只不过这里的乘子是 t 的一个待定函数而不是一个待定常数．

如把这结果专门用来求曲面(21)上的测地线，则有

$$f=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2},$$

方程(27)变为

$$\frac{(d/dt)(\dot{x}/f)}{G_x}=\frac{(d/dt)(\dot{y}/f)}{G_y}=\frac{(d/dt)(\dot{z}/f)}{G_z} \tag{28}$$

我们的问题是要从这方程组得出所需要的结果．

例 3. 若取曲面(21)为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$，则(28)为

$$\frac{f\ddot{x}-\dot{x}\dot{f}}{2xf^2}=\frac{f\ddot{y}-\dot{y}\dot{f}}{2yf^2}=\frac{f\ddot{z}-\dot{z}\dot{f}}{2zf^2},$$

这可以改写为

$$\frac{x\ddot{y}-y\ddot{x}}{x\dot{y}-y\dot{x}}=\frac{\dot{f}}{f}=\frac{y\ddot{z}-z\ddot{y}}{y\dot{z}-z\dot{y}}.$$

如果不管中间这一项，这就是

$$\frac{(d/dt)(x\dot{y}-y\dot{x})}{x\dot{y}-y\dot{x}}=\frac{(d/dt)(y\dot{z}-z\dot{y})}{y\dot{z}-z\dot{y}}.$$

积分一次，得 $x\dot{y}-y\dot{x}=c_1(y\dot{z}-z\dot{y})$，或

$$\frac{\dot{x}+c_1\dot{z}}{x+c_1z}=\frac{\dot{y}}{y},$$

再积分一次，得出 $x+c_1z=c_2y$．这是通过原点的平面方程，故知球面上的测地线是大圆弧．习题 48-5 里用不同的方法得出了这同一个结论．

在这个例题中我们很容易地解出了方程(28)，但一般情形下这一步是很难做到的．这些方程的主要意义在于它们同数学物理中的下述

重要结果有关系：若一质点不受任何外力作用而在一曲面上滑动，则其路线为一测地线. 我们将在附录 B 里证明这个动力学定理. 为便于作这一论证，可取这曲线上的弧长 s 作为参量 t，于是 $f=1$ 而方程(28)变为

$$\frac{d^2x/ds^2}{G_x}=\frac{d^2y/ds^2}{G_y}=\frac{d^2z/ds^2}{G_z}. \tag{29}$$

习 题

1. 试就图 71 中所示的闭凸曲线，证明公式(1)成立.

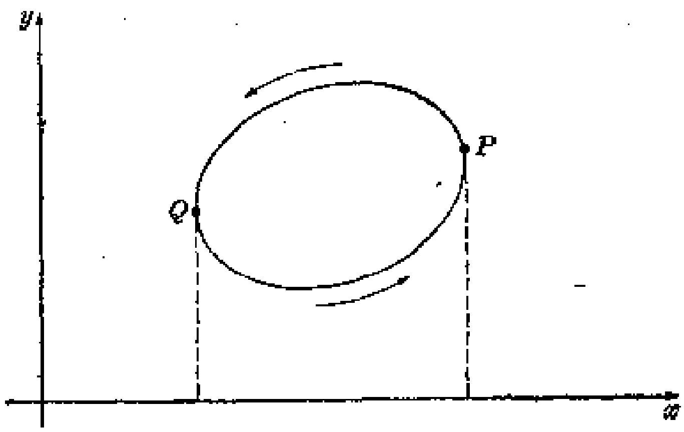


图 71

提示：你知道

$$\int_P^Q y\,dx+\int_Q^P y\,dx$$

的几何意义是什么？这里第一个积分是沿上半曲线从右向左的，第二个积分是沿下半曲线从左向右的.

2. 试就圆的参数方程 $x=a\cos t$ 及 $y=a\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 验证公式(1).
3. 用拉格朗日乘子法解下列各题.
   a. 求平面 $ax+by+cz=d$ 上最靠近原点的点. 提示：在附加条件 $ax+by+cz-d=0$ 下使 $w=x^2+y^2+z^2$ 取极小值.
   b. 试证，给定周长的三角形中，具有最大面积 A 的是等边三角形. 提示：若三边为 x, y, 及 z, 则 $A=\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$, 其中 $s=(x+y+z)/2$.
   c. 若 n 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之和为定值 s，试证其乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 的极大值为 s^n/n^2，并由此推断 n 个正数的几何平均数决不能超过其算术平均数：

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

4. 若第一象限内连接点(0, 0)及(1, 0)的曲线下含给定面积，则最短的这种曲线是一圆弧.
5. 设有定长匀质软链挂在两点之间. 若其悬挂形状使势能取极小值，试求它的形状.
6. 试用极坐标解原来那个等周问题(例 2). 提示：取曲线上任一点为原点并以该点处的切线为极轴；然后使

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\,d\theta$$

在

$$\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\,d\theta$$

必须等于一常数的附加条件下取极大值.

7. 试证在形如 $g(x, z)=0$ 的任一柱面上，测地线与 y 轴成固定角度.

附录A. 拉格朗日

拉格朗日(Joseph Louis Lagrange, 1736—1813)，不喜几何，但在变分法及分析力学上有杰出发现. 他在数论与代数上也有贡献，并为其后哺育高斯和阿倍耳的成长提供思想泉源. 他的数学事业可以看作是欧拉(年纪和功绩都大于他的那个同时代数学家）工作的自然延伸，他在许多方面推进和改进了欧拉的工作.

拉格朗日生于都灵，为法意混血的后代. 他童年时的兴趣在古典学科而不在自然科学；但早在中学时代就因读了哈莱 (Edmund Halley) 谈代数在光学上的应用一文而引起他对数学的兴趣. 然后他开始有计划地独立自学，而且进步很快，使他在十九岁时就被聘为皇家炮兵学院的数学教授①.

拉格朗日在变分法上的贡献属于他早期最重要的工作之一. 1775 年他写信给欧拉告诉他解等周问题的乘子方法. 这些问题欧拉多年来

① 参看 George Sarton 的可贵短文《拉格朗日之为人》(Lagrange's Personality, *Proc. Am. Phil. Soc.*, vol. 88, pp. 457—496, 1944).

对之束手无策，因为那是他自己的半几何方法所不能解决的．欧拉可以立刻解出他多年来所苦思的许多问题；但他以使人感佩的亲切与宽厚的态度回信给拉格朗日，而把自己的工作扣留不发表，“以免剥夺你所理该享受的任何一部分荣誉”．拉格朗日继续花了好些年时间搞变分法的解析研究，并和欧拉一起用它来解决许多新型的问题，特别是力学中的问题．

1776年欧拉离柏林去彼德堡时，向非特烈大帝建议聘请拉格朗日接替他的工作．拉格朗日应聘去柏林，在那里住了20年直到非特烈死时为止．在这一时期内他在代数和数论方面进行了广泛的研究工作，写出了他的杰作《分析力学》(1788)，在该书内他把普通力学统一起来，并且(如哈米尔顿以后所说的)把它写成“一种科学诗篇”．在这部著作里留给后人的不朽遗产中包括：拉格朗日运动方程，广义坐标，以及势能概念(这些都在附录B里讨论到)①．

非特烈死后科学家感到普鲁士宫廷里的气氛不甚惬意，于是拉格朗日接受路易十六的聘请转到巴黎，后者让他住在鲁佛宫里．拉格朗日虽有伟大天才，但非常谦逊而不固执己见；并且虽然他与贵族交游——他自己确实也是个贵族，但在整个法国大革命那些混乱的年月里，各党派的人都尊敬他爱戴他．他在这些年里的最重要工作是领导建立了米制度量衡．在数学方面他想给分析中的基本运算步骤提供令人满意的基础，但这些工作大部归于失败．拉格朗日在接近临终之日觉得数学已经走进了死胡同，此后最有才能的人将引向化学、物理、生物以及其他科学上去．但若他能预见到有高斯及其后继者的登场，使十九世纪成为漫长数学史上成果最丰富的时代，也许能使他释免这种悲观思想．

附录B．哈米尔顿原理及其含义

十八世纪数学家的一个目标是想发现一个原理，以便由此推出牛

① 参阅S. Bochner《数学对科学兴起的作用》(“The Role of Mathematics in the Rise of Science”, pp. 199—207, 1966)，其中对拉格朗日力学(以及其他许多问题)提出了一些有趣的见解．

顿力学. 在找这些线索的过程中，他们注意到初等物理中一些奇妙的事实；例如，光线通过媒质时总取需时最少的路线；悬链的平衡位置使势能取极小值；肥皂泡的外形使包围给定体积的表面积最小. 在这些以及其他事实的启发下，欧拉认为自然总以最有效最经济的方式去达到它的各种目的，认为在似乎杂乱无章的诸种现象背后隐藏着简单的规律. 这些哲学思维促使他创出变分法作为研究这类问题的一种工具. 欧拉的这种梦想在差不多一百年之后为哈米尔顿所实现.

哈米尔顿原理. 设有质量为m的粒子在力

$$\boldsymbol{F}=F_1\boldsymbol{i}+F_2\boldsymbol{j}+F_3\boldsymbol{k}$$

的作用下在空间运动，并设这个力是守恒的，意即它把粒子从一点移到另一点时所作的功不依赖于所经路线. 容易证明，存在一个标量函数$U(x,y,z)$，使$\partial U/\partial x=F_1$，$\partial U/\partial y=F_2$，$\partial U/\partial z=F_3$①. 函数$V=-U$叫粒子的势能，因它是把粒子从第一点移到第二点时反抗力$\boldsymbol{F}$所做的功. 其次，若粒子的位置矢量是$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$，从而

$$\boldsymbol{v}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$$

及

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

分别为其速度及速率，则$T=mv^2/2$是其动能.

若粒子在t_1及t_2时的位置是P_1点及P_2点，我们就想知道它从P_1到P_2所经的路线. 我们定义作用量(或哈米尔顿积分)为

$$A=\int_{t_1}^{t_2}(T-V)\,dt,$$

它的值一般要取决于粒子从P_1移到P_2所经的路线. 我们将证明，粒子所走过的实际路线，正是使作用量A取驻值的那个路线.

函数$L=T-V$叫拉格朗日函数，在所论这个情形下它的式子是

① 用矢量分析的语言，$\boldsymbol{F}$叫U的梯度.

$$L=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-V(x,y,z).$$

因此,作用量的被积函数是形如 $f(x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ 的函数,故若作用量有驻值,就必须使欧拉方程得到满足. 这些方程是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial V}{\partial x}=0,\ m\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\partial V}{\partial y}=0,\ m\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\partial V}{\partial z}=0,$$

它们可以写成

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{F}.$$

这正好就是牛顿第二运动定律. 因此牛顿定律是使粒子的作用量具有一驻值的必要条件. 由于牛顿定律制约粒子的运动情况, 故得以下的结论.

哈米尔顿原理. 若一粒子在一段时间 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 内从一点 P_1 运动到一点 P_2,则它实际走过的路程便是使作用量取一驻值的路程.

粒子路线使作用量取极大值的简单例子很容易举出来. 但若时间足够短, 则可证明作用量必然是个极小值. 这一形式的哈米尔顿原理有时叫最小作用量原理,它可以粗略地解释为: 在整个运动过程中,自然界有使动能与势能变为相等的趋势.

在以上的讨论中,我们假定牛顿定律成立,然后引出哈米尔顿原理作为其结论. 同样的论证可说明牛顿定律能从哈米尔顿原理推出, 因此质点动力学的这两种观点——矢量的观点和变分法的观点, 是彼此等价的. 这个结果强调指出了变分法原理在物理学中的基本特征: 它们不必参照任何坐标系,而只要用能量就可以表述有关的物理定律.

以上的论证可以立即推广到质量为 $m_i(i=1,\cdots,n)$ 的 n 个粒子组的情形.这里每个粒子的位置矢量是 $\boldsymbol{r}_i(t)=x_i(t)\boldsymbol{i}+y_i(t)\boldsymbol{j}+z_i(t)\boldsymbol{k}$, 并在守恒力 $\boldsymbol{F}_i=F_{i1}\boldsymbol{i}+F_{i2}\boldsymbol{j}+F_{i3}\boldsymbol{k}$ 的影响下运动. 并且这里粒子组的势能是这样一个函数 $V(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n)$, 它适合

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=-F_{i1},\ \frac{\partial V}{\partial y_i}=-F_{i2},\ \frac{\partial V}{\partial z_i}=-F_{i3},$$

动能是

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right],$$

而在 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 这段时间的作用量是

$$A=\int_{t_1}^{t_2}(T-V)dt.$$

完全同以前一样，我们看到粒子组的牛顿运动定律

$$m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}=\boldsymbol{F}_i$$

是作用量取驻值的必要条件．因此对于任何有限粒子组，若所受力是守恒的，哈米尔顿原理都成立．对于含有附加条件及刚体的那种更一般的动力系统以及对于连续媒质来说，这一原理都同样适用．

此外，哈米尔顿原理可用来推出电磁学、量子学说以及相对论中的基本定律．它的影响是如此深远，以致有许多科学家把它看作是数学物理中功效最大的一个原理，并把它放在物理科学的顶峰．量子学说的创立者普朗克(Max Planck)曾用以下的话来表达这一观点："物理学中最崇高且最为人所殷切追求的目标，是把业已观察到并行将观察到的一切自然现象缩并成单独一个原理…．在那些标志着过去几百年物理科学成就的，多少带有一般性的定律中，最小作用原理，就其内容和形式而论，可能最接近于理论研究上这一理想的最终目标．"

例 1. 若质量为 m 的一个粒子限制在给定曲面 $G(x, y, z)=0$ 上运动，且若不受外力作用，则它会沿一测地线滑动．为确证这一事实，我们先指出，由于无外力作用，故 $V=0$ 从而拉格朗日函数 $L=T-V$ 化为 T，而

$$T=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

现在应用哈米尔顿原理，要求使作用量

$$\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=\int_{t_1}^{t_2}T\,dt$$

在附加条件 $G(x,y,z)=0$ 下取驻值. 根据第 49 节, 这相当于要求积分

$$\int_{t_1}^{t_2}[T+\lambda(t)G(x,y,z)]dt$$

取驻值而不带附加条件, 其中 $\lambda(t)$ 是 t 的待定函数. 对于这个无附加条件的变分法问题, 欧拉方程是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}-\lambda G_x=0,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}-\lambda G_y=0,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}-\lambda G_z=0.$$

消去 m 及 G 后, 这些方程变为

$$\frac{d^2x/dt^2}{G_x}=\frac{d^2y/dt^2}{G_y}=\frac{d^2z/dt^2}{G_z}.$$

但粒子的总能量 $T+V=T$ 是常数(这事下面证明), 故它的速率也是常数, 故若弧长 s 从一合适的点量起, 故 $s=kt$, 其中 k 为某一常数. 这就可以把上面的方程写为

$$\frac{d^2x/ds^2}{G_x}=\frac{d^2y/ds^2}{G_y}=\frac{d^2z/ds^2}{G_z}.$$

这正好就是方程 49-(29), 故粒子的运动路线确如所说是一测地线.

拉格朗日方程. 在古典力学中, 我们可以把哈米尔顿原理看作是拉格朗日运动方程的来源, 而后者在那门学科里占主导地位. 为找出这两者之间的联系, 首先必须了解什么叫自由度? 什么叫广义坐标.

在三维空间里自由运动的单独一个粒子, 我们说它具有三个自由度, 因它的位置可以由三个独立的坐标 x, y, 及 z 确定. 若限制它在一曲面 $G(x,y,z)=0$ 上运动, 我们就把它的自由度减到二, 因为其中一个坐标可用别的两个坐标来表示. 同样, 一个不受限制的 n 个粒子的组有 $3n$ 个自由度, 而加上限制条件的结果, 就会使描述粒子组状态所需的独立坐标数目减少. 若粒子的直角坐标是 x_i, y_i 及 z_i $(i=1, 2, \cdots, n)$, 且若限制条件用 k 个可联立的独立(即线性无关)方程描述

$$G_j(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_n,y_n,z_n)=0,\ j=1,2,\cdots,k,$$

则粒子组的自由度是 $m=3n-k$. 从原理上讲, 我们可以利用这些方程. 将 $3n$ 个数 x_i, y_i, z_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 用其中的 m 个来表示, 从而将坐标

的数目从 $3n$ 减小到 m. 但更方便的做法是引用拉格朗日广义坐标 q_1, $q_2, \cdots, q_m$, 这是任何一组 m 个独立的坐标，只要它们的值能确定粒子组的状态便行. 这就使我们有充分的自由来选取任何一种坐标系——直角坐标、柱坐标、球坐标或任何别的坐标，以适应手头所处理的问题，并使我们对问题的分析不依赖于任何特定的坐标系. 现在我们用这些广义坐标来表示粒子的直角坐标，并指出，在由此得出的公式中，会自动地包括限制条件：$x_i = x_i(q_1, \cdots, q_m)$, $y_i = y_i(q_1, \cdots, q_m)$, 及 $z_i = z_i(q_1, \cdots, q_m)$ (其中 $i = 1, \cdots, n$).

若 m_i 是第 i 个粒子的质量，则粒子组的动能是

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right];$$

而用广义坐标表示，则可写为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2\right], \quad (1)$$

其中 $\dot{q}_j = dq_j/dt$. 为以后讨论的需要，这里指出 T 是 $\dot{q}_i$ 的二次齐次函数. 粒子组的势能 V 假定只是 q_j 的函数，于是拉格朗日函数 $L = T - V$ 是下列形式的函数：

$$L = L(q_1, q_2, \cdots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_m).$$

哈米尔顿原理告诉我们，运动应按这样的方式进行，使任何一段时间 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 的作用量 $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ 取驻值，因而必须满足欧拉方程. 在这种情形下的欧拉方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m. \quad (2)$$

这些方程叫拉格朗日方程. 它们是 m 个二阶微分方程，形成一个方程组，从这方程组得出的解 q_j 都是 t 的函数.

现在我们只从拉格朗日方程推出一个普遍原理，即能量守恒定律.

论证的第一步是指出下面的恒等式，它对自变量 t, $q_1, q_2, \cdots, q_m$,

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_m$ 的任何函数 L 都成立:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{m}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L\right)=\sum_{j=1}^{m}\dot{q}_j\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right]-\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{3}$$

由于这一粒子组的拉格朗日函数满足方程(2)且又不显含 t, 故(3)的右边等于0, 从而有

$$\sum_{j=1}^{m}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L=E, \tag{4}$$

其中 E 为某一常数. 其次我们注意到 $\partial V/\partial \dot{q}_j=0$, 故 $\partial L/\partial \dot{q}_j=\partial T/\partial \dot{q}_j$. 正如以前所指出的,(1)式表明 T 是 $\dot{q}_j$ 的二次齐次函数, 故根据齐次函数的欧拉定理[①], 我们有

$$\sum_{j=1}^{m}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{j=1}^{m}\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=2T.$$

有了这个结果, 方程(4)就变成 $2T-L=E$ 或 $2T-(T-V)=E$, 故有

$$T+V=E,$$

它告诉我们在运动过程中动能与势能之和是常数.

在以下的例题中, 我们说明拉格朗日方程在特定动力学问题中的用法.

例 2. 若质量为 m 的粒子在平面内运动, 其所受外力为指向原点而数值等于 km/r^2 的引力, 这时我们自然要取极坐标作为广义坐标: $q_1=r$ 及 $q_2=\theta$. 易知 $T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$ 及 $V=-km/r$, 故拉格朗日函数是

$$L=T-V=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{km}{r},$$

于是拉格朗日方程是

---

① $f(x,y)$ 叫 x 及 y 的 n 次齐次函数, 如果 $f(kx,ky)=k^n f(x,y)$. 若两边都对 k 求导然后令 $k=1$, 则得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y),$$

这就是齐次函数的欧拉定理. 对于两个以上自变量的齐次函数, 也有同样的结果.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0. \tag{6}$$

由于L不显含θ，故方程(6)告诉我们$\partial L/\partial\dot{\theta}=mr^2\dot{\theta}$等于一常数，即

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=h, \tag{7}$$

其中h为一常数，现假定它是正的．其次我们看到(5)容易写成

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{k}{r^2}.$$

这正好就是方程 21-(12)，那是我们在第 21 节解出了的，从而得出了粒子路线为一圆锥曲线的结论．

二重积分的变分法问题．上述为使积分取极值求其必要条件的一般方法，同样可用之于重积分．例如，考察xy平面闭曲线C所围的域R(图 72)．设函数$z=z(x, y)$定义于R上且在边界C上取预先指定的值，而(除了普通可微条件之外)在其他方面是任意的．这个函数可以看作是定义了绷在固定边界上的一块空间可变曲面．形如

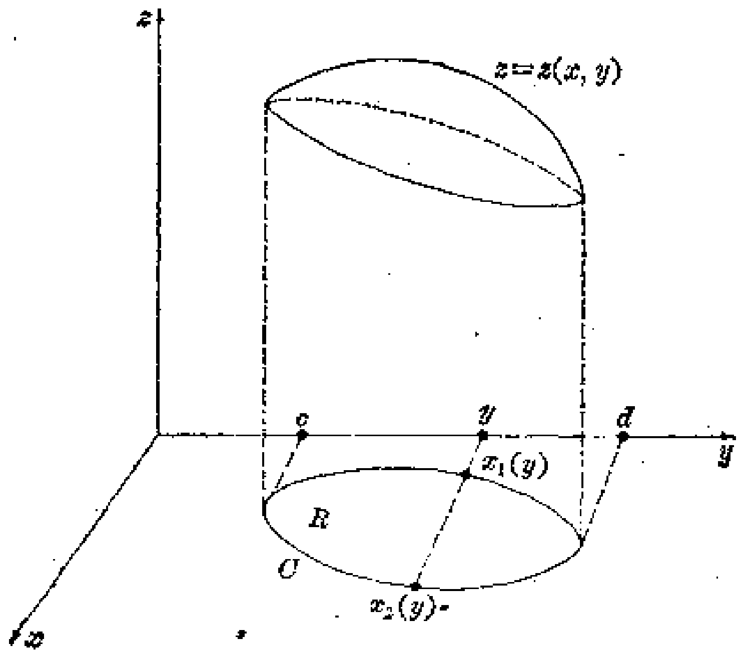


图 72

$$I(z)=\iint_R f(x, y, z, z_x, z_y)\,dxdy \tag{8}$$

的一个积分的值将取决于所选取的 z，因此可以提出怎样求一个函数 z（驻函数）使这积分取驻值的问题.

我们的推理也按熟知的格局进行. 假定 $z(x, y)$是所需的驻函数，作一可变动的函数 $\bar{z}(x, y)=z(x, y)+\alpha\eta(x, y)$，其中 $\eta(x, y)$在 C 上等于 0. 把 $\bar{z}$ 代入积分(8)后，得参量 α 的一个函数，并且也同以前一模一样，从必要条件 $I'(0)=0$ 得出

$$\iint_R\left(\frac{\partial f}{\partial z}\eta+\frac{\partial f}{\partial z_x}\eta_x+\frac{\partial f}{\partial z_y}\eta_y\right)dxdy=0. \tag{9}$$

为使消去 η_x 及 η_y 的工作简化，现假定曲线 C 具有这样的性质，即 xy 平面里平行于坐标轴的任一直线与 C 至多相交于二点①. 然后，把(9)式括弧里的第二项看作累次积分(图 72)，则得

$$\iint_R\frac{\partial f}{\partial z_x}\eta_x\,dxdy=\int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{\partial f}{\partial z_x}\eta_x\,dxdy;$$

又由于

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial z_x}\eta_x\,dx=\eta\frac{\partial f}{\partial z_x}\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z_x}\right)dx$$
$$=-\int_{x_1}^{x_2}\eta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z_x}\right)dx$$

（因 η 在 C 上等于 0），故可知

$$\iint_R\frac{\partial f}{\partial z_x}\eta_x\,dxdy=-\iint_R\eta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z_x}\right)dxdy.$$

含 η_y 的那一项也可作同样的变换，于是(9)就变为

$$\iint_R\eta\left[\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z_y}\right)\right]dxdy=0. \tag{10}$$

现在根据 η 是任意函数这一性质，可断言(10)式方括号里的式子必为

① 如应用格林定理，这一限制是不必要的.

0. 故在这情形下得极值曲线的欧拉方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z_x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z_y}\right)-\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{11}$$

同以前一样，一个驻函数(如果它存在)是满足所给边界条件的一个极值曲线.

例 3. 欧拉第一个提出的极小曲面问题的最简形式是：给定空间一闭曲线，求以它为界的面积最小的曲面. 若假定将此曲线投射到 xy 平面包围域 R 的闭曲线 C，且此曲面可表成形式 $z=z(x,y)$，则我们的问题是使曲面面积的积分

$$\iint\limits_R \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

取极小值，但附加边界条件：$z(x,y)$ 必须在 C 上取预先指定的值. 这个积分的欧拉方程(11)是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)=0,$$

它可以写成

$$z_{xx}(1+z_y^2)-2z_xz_yz_{xy}+z_{yy}(1+z_x^2)=0. \tag{12}$$

这个偏微分方程是拉格朗日发现的. 欧拉曾指出，凡不是一块平面的每个极小曲面必定是马鞍形的，而且这曲面上每一点处的平均曲率必为 0①. 要证明极小曲面存在，也就是证明(12)具有满足适当边界条件的解，这是个非常困难的数学问题. 这问题直到 1930 及 1931 才由拉多(T. Rado, 匈牙利人, 1895—1965)及道格拉斯(J. Doglas, 美国人, 1897—1965)各自独立地完全解决. 比利时的盲人物理学家布拉腊(J. Plateau, 1801—1883)曾设计出求极小曲面的一种实验方法，在他1873年论述液体分子力的著作中描述了这一方法. 这方法的实质是，若把

① 一点处的平均曲率定义如下. 考察曲面上一点处的法线以及包含该法线的一个平面. 当这平面以法线为轴转动时，它在曲面上所割曲线的曲率随之而变，而平均曲率则为极大曲率与极小曲率之和的一半.

弯成闭曲线的一圈铁丝浸入肥皂水后，绷在铁丝上的皂膜，为使表面张力所致的势能取极小值，就将取面积为极小的形状，布拉韬做了许多这类实验，因此从他那个时候起，极小曲面的问题就叫布拉韬问题①.

例 4. 在第 24 节里，我们从牛顿第二运动定律推出了一维波动方程．在本例中，我们要从借助于方程(11)从哈米尔顿原理来推出波动方程．假定：有恒定线性密度m的弦以张力T拉在x轴上的点$x=0$与$x=\pi$之间；把它拉开后任其在xy平面作振动；它的位移$y(x,t)$相对说来很小，以致可认为张力基本保持不变，而斜率的二次幂以上可以忽略．当弦被拉开时，其上一段长度元素dx被拉成ds，而

$$ds=\sqrt{1+y_x^2}\,dx\cong\left(1+\frac{1}{2}y_x^2\right)dx.$$

这一近似式是这样来的：把$\sqrt{1+y_x^2}=(1+y_x^2)^{\frac{1}{2}}$展成二项级数$1+y_x^2/2+\cdots$并抛弃$y_x$的所有高于二次以上的乘幂项．作用在这一段元素上的功是$T(ds-dx)=\frac{1}{2}Ty_x^2$，故

$$V=\frac{1}{2}T\int_0^\pi y_x^2\,dx.$$

这段元素的质量是mdx，速度是y_t，故其动能是$\frac{1}{2}my_t^2dx$，所以整个弦的动能是

$$T=\frac{1}{2}m\int_0^\pi y_t^2\,dx.$$

这里的拉格朗日函数是

$$L=T-V=\frac{1}{2}\int_0^\pi (my_t^2-Ty_x^2)\,dx,$$

于是，根据哈米尔顿原理，应使之取驻值的作用量是

① 关于这一问题的标准数学著作是 R. Courant《狄利克雷原理，保角映射及极小曲面》(Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces, 1950).

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\pi}(my_t^2-Ty_x^2)\,dxdt.$$

在这情形下，方程(11)变为

$$\frac{T}{m}y_{xx}=y_{tt},$$

可以看出这就是方程 24-(8).

关于哈米尔顿的注记. 爱尔兰数学家兼数学物理学家哈米尔顿(William Rowan Hamilton, 1805—1865)是个出名的神童.他自幼受教于一位怪僻而有学问的传教士叔伯. 他三岁能阅读英文；四岁开始学希腊、拉丁及希伯莱文；八岁又学了法文、意大利文；十岁学梵文及阿拉伯文，据说他到十三岁时就掌握了十三种语文. 这种强迫开发的语文才华在他十四岁时终止了，从那时起他的兴趣转向数学、天文和光学. 十八岁时他发表一篇论文，订正拉普拉斯在《天体力学》中的一处错误；当他还在都柏林的三一学院求学时，就被任命为该学院的天文教授，并自动成为爱尔兰皇家天文台台长.

他的第一项重要工作是在几何光学方面. 他在 27 岁时就因从数学理论推测有锥状折射现象而出名.更重要的是他证明所有光学问题都可用单独一种方法(它把费马的最小时间原理作为特例包括在内)求解.然后他把这方法推广应用到力学上，在 30 岁时他就提出一个单独的原理(现称哈米尔顿原理)，以此表明光学和力学只不过是变分法的两个侧面.

1835 年他转而研究代数，根据把复数看作有序实数对的思想，作出复数的严密理论，这项工作是独立于高斯做出的，后者在 1831 年已经发表了同样的思想，但强调要把复数解释为复平面上的点. 由于复数又可看作平面上的矢量，故其后哈米尔顿想把复数的代数结构推广到三维空间的矢量上去. 这项工作失败了，但这方面的努力使他在 1843 年发现了四元数. 那是一种四维矢量，它把复数作为其子系统包括在内；用现代的术语来说，它们形成最简单的非可换线性代数，其中除法为可行①. 其后哈米尔顿就把他的余生贡献在详细探讨四元数的理论和应用上，写出了关于这个题材的大量难以读懂的论著. 这项工作对物理与几何很少影响，其后为吉布斯(Willard Gibbs)的更实用的矢量分析以及格拉斯曼(Grassmann)与卡尔丹(E. Cartan)的多线性几何所取代.哈米尔顿在四元数方面的工作所留下的一个重要结果，是证明存在这样一个无矛盾的数系，其中乘法交换律不复成立. 这

① 幸而哈米尔顿当时未知高斯 1819 年就发现了四元数，但未把这种思想发表. 见高斯《全集》vol. VIII, pp. 357—362.

把代数从那些使它陷于瘫痪的成见中解放出来，鼓舞十九世纪末和二十世纪的其他数学家，去对各种类型的线性代数进行广泛的研究.

哈米尔顿也是个蹩脚诗人，是诗人华兹华思和柯立芝的朋友，同他们书信往来频繁，讨论科学、文学和哲学上的问题.

第十章　拉普拉斯变换

50. 引言

近年来，利用拉普拉斯变换来解某些类型的微分方程与积分方程的兴趣，有了相当的增长，除了这些用场之外，拉普拉斯变换也同纯数学的重要部分有一些密切联系．我们将使读者对这方面的一些事情获得充分认识，而无需过于细究分析上的严密论证和计算技巧，因为那些材料放在内容更丰富的论著中比较合适．

在讲解细节之前，这里先讲些一般性的话，以便在合适的地方说明本章的主要思想．首先指出，微分法运算可把一个函数 $f(x)$ 变换为另一函数——它的导数 $f'(x)$．若用字母 D 来表微分运算，那末这一变换过程可写为

$$D[f(x)]=f'(x). \tag{1}$$

另一重要的函数变换过程是积分法所作的变换：

$$I[f(x)]=\int_0^x f(t)dt. \tag{2}$$

还有一种甚至比这还要简单的变换过程，即以一特定函数 $g(x)$ 去乘所有函数的运算：

$$M_g[f(x)]=g(x)f(x). \tag{3}$$

这些例子有一共同的基本特点：**每种变换过程都是作用于一些函数而得出另外一些函数**．显然，在大多数情形下，对于给定变换过程所作用的函数 $f(x)$，必须加以一些限制．例如，在(1)中 $f(x)$ 必须是可微的，而在(2)中它必须是可积的．在上述每个例子中，右边的函数叫 $f(x)$ 在相应变换作用下的**变换式**．

对于函数的一个一般变换(过程) T 叫做**线性的**，如果对于一切容许函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 以及一切常数 α 及 β 关系式

$$T[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha T[f(x)]+\beta T[g(x)] \tag{4}$$

都成立. 用语言来表达，这就是，方程(4)告诉我们：两个函数的任一线性组合的变换式等于其各个变换式的同一线性组合. 值得指出的是，当$\alpha=\beta=1$以及当$\beta=0$时，(4)就成为

$$T[f(x)+g(x)]=T[f(x)]+T[g(x)]$$

以及

$$T[\alpha f(x)]=\alpha T[f(x)].$$

易见(1)，(2)，及(3)所定义的变换都是线性的.

有一类特别重要的线性变换是积分变换. 为对这种变换得到一个大致的认识，我们来考察定义在有限或无限区间$a\leqslant x\leqslant b$上的函数$f(x)$，并选取变量x及参量p的一个固定函数$K(p,x)$，则一般的积分变换由

$$T[f(x)]=\int_a^b K(p,x)f(x)dx=F(p) \tag{5}$$

给出. 函数$K(p,x)$叫做变换T的核，而且不管K的性质如何，T显然是线性的. 广义形式的线性积分变换这个概念，曾是近世分析中一些最富于成果的思想的根源. 在古典分析中，也曾有人对(5)的多种特殊情形作过详细研究，得出一些对于处理特殊类型问题有用的特定变换.

当$a=0$，$b=\infty$而$K(p,x)=e^{-px}$时，我们得到(5)的为我们所关心的特例——拉普拉斯变换L，它的定义是

$$L[f(x)]=\int_0^\infty e^{-px}f(x)dx=F(p). \tag{6}$$

于是，凡能使这积分存在的任何函数$f(x)$，都能对之作拉普拉斯变换L，而得出它的拉普拉斯变换式$L[f(x)]=F(p)$——参量p的一个函数①. 我们提醒读者，(6)中的旁义积分定义为下列极限，并且它只有在这极限存在时才存在：

$$\int_0^\infty e^{-px}f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-px}f(x)dx. \tag{7}$$

---

① 正如这句话所提示的，我们以后将一贯用小写字母表示x的函数，而用相应的大写字母表示这些函数的变换式.

若右边的极限存在，则说左边的旁义积分收敛．

下面的拉普拉斯变换式是很容易算出的：

$$f(x)=1,\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-px}\,dx=\frac{1}{p};\tag{8}$$

$$f(x)=x,\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-px}x\,dx=\frac{1}{p^2};\tag{9}$$

$$f(x)=x^n,\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-px}x^n\,dx=\frac{n!}{p^{n+1}};\tag{10}$$

$$f(x)=e^{ax},\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-px}e^{ax}dx=\frac{1}{p-a};\tag{11}$$

$$f(x)=\sin ax,\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-px}\sin ax\,dx=\frac{a}{p^2+a^2};\tag{12}$$

$$f(x)=\cos ax,\qquad F(p)=\int_0^\infty e^{-px}\cos ax\,dx=\frac{p}{p^2+a^2}.\tag{13}$$

(11)里的积分在 $p>a$ 时收敛，而所有其他的积分在 $p>0$ 时收敛．读者应该自己去做出必要的计算，就能完全清楚为什么要对 p 加上这些限制(见习题 1)．为说明此事，我们把(10)的计算细节都做出来，这里假定 n 是正态数：

$$\begin{aligned}L[x^n]&=\int_0^\infty e^{-px}x^n\,dx=-\frac{x^ne^{-px}}{p}\Big]_0^\infty+\frac{n}{p}\int_0^\infty e^{-px}x^{n-1}dx\\&=\frac{n}{p}L[x^{n-1}]=\frac{n}{p}\left(\frac{n-1}{p}\right)L[x^{n-2}]\\&=\cdots=\frac{n!}{p^n}L[1]=\frac{n!}{p^{n+1}}.\end{aligned}$$

这里可以看出我们主要应用了下一事实：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{px}}=0\qquad(\text{对 } p>0).$$

前面这些公式可在第 52 节的表 1 中找到．利用 L 的线性，还可以立即得出另外一些简单的变换式，而无需进行积分，例如

$$L[2x+3]=2L[x]+3L[1]=\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p}.$$

在以后各节中，我们要讲一些方法来求更复杂的函数的拉普拉斯变换式.

如前所说，拉普拉斯变换 L 可以看作是一般积分变换(5)，在取 $a=0$, $b=\infty$ 及 $k(p,x)=e^{-px}$ 时的特殊情形. 为什么我们要取这些积分限和这一特殊的核呢？为使读者懂得这样选取可能有些什么好处，不妨拿这个积分跟幂级数作类比，以便从中得到一些启发.

若把一幂级数写成形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n,$$

那末可以和它作类比的自然是旁义积分

$$\int_0^{\infty} a(t)x^t dt.$$

现在我们把记法稍改一下，写出 $x=e^{-p}$，这个积分就变为

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}a(t)dt,$$

这正好就是函数 $a(t)$ 的拉普拉斯变换式. 所以拉普拉斯变换是幂级数在连续情况下的类比；由于幂级数之和在分析中很重要，所以有理由预料拉普拉斯变换也将是重要的.

拉普拉斯的事迹在附录 A 中有简短介绍.

习　题

1. 计算(8)，(9)，(11)，(12)及(13)中的积分.
2. 不通过计算积分，试证

   a. $L[\sinh ax]=\dfrac{a}{p^2-a^2}$,　$p>|a|$;

   b. $L[\cosh ax]=\dfrac{p}{p^2-a^2}$,　$p>|a|$.
3. 不通过计算积分，试求 $L[\sin^2 ax]$ 及 $L[\cos^2 ax]$，这两个变换式之间有什么关系？
4. 利用正文中的公式求下列各函数的变换式：

a. 10;

b. $x^5\quad\cos 2x$;

c. $2e^{3x}-\sin 5x$;

d. $4\sin x\cos x+2e^{-x}$;

e. $x^6\sin^2 3x+x^6\cos^2 3x$.

5. 求以下列各式为其变换式的一个函数 $f(x)$.

a. $\frac{30}{p^4}$;　　b. $\frac{2}{(p+3)}$;

c. $\frac{4}{p^3}+\frac{6}{(p^2+4)}$;　　d. $\frac{1}{(p^2+p)}$;

e. $\frac{1}{(p^4+p^2)}$.

6. 试给 $\frac{1}{2}!$ 作出一个合理的定义。

51. 关于理论的几点说明

在着手讲应用以前，最好是更仔细地考虑一下一个函数在什么情况下具有拉普拉斯变换式. 对这问题若要作详尽与严格的讨论，需要熟悉旁义积分的一般理论，而这个我们并不假定读者需要具备. 但在初等微积分里通常都简短介绍过旁义积分，因此只要掌握以下几个简单的命题就足够我们用了.

首先，我们说积分

$$\int_0^\infty f(x)dx \tag{1}$$

收敛，如果存在极限

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx,$$

此时，(1)的值就定义为这极限的值:

$$\int_0^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx.$$

其次，(1)收敛，如果积分

$$\int_0^\infty |f(x)|dx$$

收敛，在这情形下，我们说(1)是**绝对收敛的**．最后，(1)绝对收敛(因而收敛)，如果存在这样一个函数 $g(x)$ 使得 $|f(x)|\leqslant g(x)$，且

$$\int_0^\infty g(x)dx$$

收敛(这叫**比较检验法**)．

于是，若 $f(x)$ 是定义在 $x\geqslant 0$ 上的所给函数，则为使(1)收敛，首先要求积分 $\int_0^b f(x)dx$ 对于每一个有限的 $b>0$ 存在．为保证这种积分存在，只要假定 $f(x)$ 连续，或者至少是**逐段连续**便行．所谓 $f(x)$ 逐段连续，是指 $f(x)$ 在每个有限区间 $0\leqslant x\leqslant b$ 上，除了可能在有限个点处出现跳跃性间断外(在该处函数的左右极限趋于不同的值)，是连续的．图73所示是个典型的逐段连续函数的形状；它从0到 b 的积分，等于其各连续的部分在各相应子区间上的积分之和．这类函数几乎包括实际工作中可能出现的所有函数．特别是它包括间断的阶梯函数以及锯

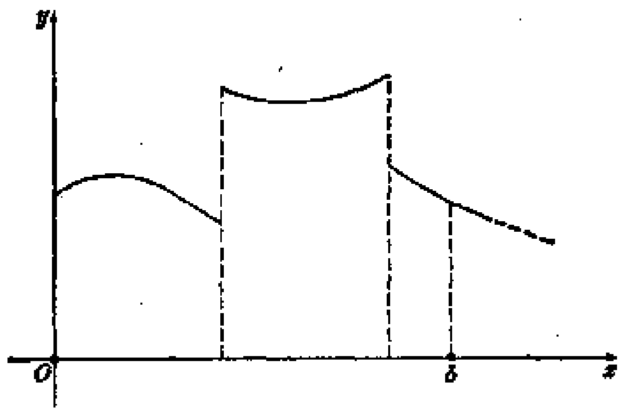


图　73

齿函数，这两者分别表示物理与工程问题中突然施加或移去力以及电压的情形．

若 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 逐段连续，则对于其拉普拉斯变换式

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-px}f(x)dx$$

是否存在的唯一成问题之处，是被积函数 $e^{-px}f(x)$ 在大的 x 值时的性态如何．为肯定使这被积函数减小得足够快(或 $f(x)$ 增大得不太快)

以保证积分收敛，我们将进一步假定 $f(x)$ 具有指数函数的数量级．这就是说存在这样的常数 M 及 c，使得

$$|f(x)| \leqslant Me^{cx}. \tag{2}$$

这样，即使在 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 变为无穷大，它的增大还慢于某个指数函数 e^{cx} 的常数倍．任何有界函数显然具有 $c=0$ 的指数函数的数量级．作为其他的例子，我们举出 e^{ax}（这时 $c=a$）以及 x^n（这时 c 为任一正数）．另一方面，e^{x^2} 就不具有指数函数的数量级．今若 $f(x)$ 满足(2)，则有

$$|e^{-px}f(x)| \leqslant Me^{-(p-c)x};$$

而由于右边那个函数的积分在 $p>c$ 时收敛，故 $f(x)$ 的拉普拉斯变换式在 $p>c$ 时绝对收敛．此外，我们看到

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^\infty |e^{-px}f(x)|\,dx$$
$$\leqslant M\int_0^\infty e^{-(p-c)x}\,dx = \frac{M}{p-c}, \qquad p>c,$$

故

$$p\to\infty \quad 时 \quad F(p)\to 0. \tag{3}$$

实际上，可以证明只要 $F(p)$ 存在(3)就总成立，而不管 $f(x)$ 是否为逐段连续以及具有指数函数的数量级．因此，若有 p 的一个函数 $\phi(p)$，它在 $p\to\infty$ 时的极限不存在或不等于 0，那它不能成为任何 $f(x)$ 的拉普拉斯变换式．特别是，p 的多项式，$\sin p$, $\cos p$, e^p, 以及 $\log p$ 都不能作为拉普拉斯变换式．另一方面，若有理函数分子的次数低于分母的次数，它就可能是一个拉普拉斯变换式．

以上所讲说明任一具有指数函数数量级的逐段连续函数都有一拉普拉斯变换式，因此，这是 $L[f(x)]$ 存在的充分条件．然而它们并非必要条件，例如 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 就可以说明．这个函数在 $x=0$ 处具有无穷型间断，故它并非逐段连续，但它的从 0 到 b 的积分存在，又因它在 x 取大值时是有界的，故它的拉普拉斯变换式存在．事实上，当 $p>0$ 时，我

们有

$$L[x^{-\frac{1}{2}}]=\int_0^\infty e^{-px}x^{-\frac{1}{2}}dx,$$

作变量置换 $px=t$，得出

$$L[x^{-\frac{1}{2}}]=p^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{-\frac{1}{2}}dt.$$

再换一次变量 $t=s^2$，得出

$$L[x^{-\frac{1}{2}}]=2p^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-s^2}ds. \tag{4}$$

在大多数初等微积分书里都有这一积分之值为 $\sqrt{\pi}/2$ 的证明（见习题 1），故有

$$L[x^{-\frac{1}{2}}]=\sqrt{\pi/p}. \tag{5}$$

这个结果在后面一节里将要用到.

在本章的其余部分我们将专讲拉普拉斯变换式的用法，而不打算研究这些步骤所依据的纯数学理论．这些步骤自然需要有理论根据，而那些不能容忍数学形式主义的读者，可以在这一学科的大篇幅著作中找到他所需要的材料.

习　　题

1．若 I 表示(4)中的积分，则可写出(因 s 是假变量)

$$I^2=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

试将积分换为极坐标算出这二重积分并证明 $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2．对下列各题，画出函数图形并求其拉普拉斯变换：

a．$f(x)=u(x-a)$，其中 a 是正数，u 是单位阶梯函数，其定义为

$$u(x)=\begin{cases}0 & \text{如果 } x<0\\ 1 & \text{如果 } x\geqslant 0;\end{cases}$$

b．$f(x)=[x]$，这里 $[x]$ 表示 $\leqslant x$ 的最大整数；

c．$f(x)=x-[x]$；

d. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{如果 } 0\leqslant x\leqslant \pi\\ 0 & \text{如果 } x>\pi.\end{cases}$

3. 试直接说明 $L[e^{x^2}]$ 不存在. 提示:

$$x^2-px=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}.$$

4. 试直接说明 $L[x^{-1}]$ 不存在.

5. 设 ϵ 为一正数, 考察函数 $f_\epsilon(x)$, 其定义如下:

$$f_\epsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{\epsilon} & \text{如果 } 0\leqslant x\leqslant\epsilon\\ 0 & \text{如果 } x>\epsilon.\end{cases}$$

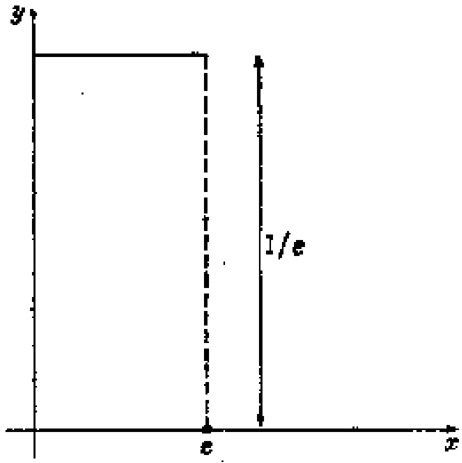


图 74

这个函数的图形如图 74 所示. 显然, 对于每一 $\epsilon>0$ 我们有 $\int_0^\infty f_\epsilon(x)dx=1$. 试证

$$L[f_\epsilon(x)]=\frac{(1-e^{-p\epsilon})}{p\epsilon}$$

及

$$\lim_{\epsilon\to 0}L[f_\epsilon(x)]=1.$$

严格说来, $\lim\limits_{\epsilon\to 0}f_\epsilon(x)$ 不能看作是一个确实存在的函数, 故 $L[\lim\limits_{\epsilon\to 0}f_\epsilon(x)]$ 是没有定义的; 但若不管是否合法, 则

$$\delta(x)=\lim_{\epsilon\to 0}f_\epsilon(x)$$

似乎象个准函数, 它在 $x=0$ 处为无穷大, 而在 $x>0$ 处为 0, 且具有性质

$$\int_0^\infty\delta(x)dx=1 \quad 及 \quad L[\delta(x)]=1.$$

这个准函数 $\delta(x)$ 叫**狄拉克** δ(读如得尔他)**函数或单位脉冲函数**[①].

52. 在微分方程上的应用

设我们要求微分方程

$$y''+ay'+by=f(x) \tag{1}$$

① 狄拉克(P. A. M. Dirac, 1902—)是英国理论物理学家, 他在 31 岁时因量子理论方面的工作获诺贝尔奖. 要使他的 δ 函数获得可靠的数学意义, 有好几种有趣的方式. 读者可参看如 I. Halperin《分布论导引》("Introduction to the Theory of Distributions", 1952); 或 A. Erdélyi《运算微积及广义函数》("Operational Calculus and Generalized Functions", 1962).

的满足初始条件 $y(0)=y_0$ 及 $y'(0)=y'_0$ 的特解．我们当然可以试用第三章的方法求出通解，然后根据初始条件算出任意常数．但用拉普拉斯变换也是解决这问题的另一种方法，并且具有几方面的优点．

为说明怎样应用这个方法，可对(1)的两边作拉普拉斯变换：

$$L[y''+ay'+by]=L[f(x)].$$

根据 L 的线性性质，上式可写为

$$L[y'']+aL[y']+bL[y]=L[f(x)]. \tag{2}$$

第二步是用 $L[y]$ 来表示 $L[y']$ 及 $L[y'']$．先用分部积分法得出

$$\begin{aligned} L[y'] &= \int_0^\infty e^{-px}y'dx \\ &= ye^{-px}\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px}y\,dx \\ &= -y(0)+pL[y], \end{aligned}$$

故

$$L[y']=pL[y]-y(0). \tag{3}$$

其次有

$$L[y'']=L[(y')']=pL[y']-y'(0),$$

故

$$L[y'']=p^2L[y]-py(0)-y'(0). \tag{4}$$

若把所给初始条件代入(3)及(4)，然后把这些式子代入(2)，便得 $L[y]$ 的一个代数方程．

$$p^2L[y]-py_0-y'_0+apL[y]-ay_0+bL[y]=L[f(x)];$$

解出 $L[y]$，得到

$$L[y]=\frac{L[f(x)]+(p+a)y_0+y'_0}{p^2+ap+b}. \tag{5}$$

函数 $f(x)$ 是已知的，故它的拉氏变换式是 p 的一个特定函数；又因 a，b，y_0 及 y'_0 是已知常数，故 $L[y]$ 是 p 的一个完全确定的函数．今若能找出什么函数 $y(x)$ 以(5)的右边为其拉普拉斯变换式，那末这个函数就将是我们这个问题（包括初始条件等一切）的解．当(1)这种形式方

程中的 $f(x)$是间断函数时，用这套方法求解特别适宜，因为在这些情形下，第三章中的方法可能难于应用.

上面的讨论中有一个明显的漏洞：为使(2)具有意义，函数 $f(x)$，y，y' 以及 y'' 必须有拉普拉斯变换式．但只要假定 $f(x)$为逐段连续并具有指数函数的数量级，这个困难就可消除．作了这一假定之后，就可证明(这里从略)y，y' 以及 y'' 也都具有同样的性质，因而它们都有拉普拉斯变换式．另一个漏洞是在得出(3)及(4)时我们把

$$\lim_{x\to\infty} ye^{-px}=0 \quad 及 \quad \lim_{x\to\infty} y'e^{-px}=0$$

当作是不言而喻的事．但既然在所假定的条件下 y 及 y' 自动具有指数函数的数量级，故对于足够大的 p 值这两式确是成立的.

例 1. 求

$$y''+4y=4x \tag{6}$$

的满足初始条件 $y(0)=1$ 及 $y'(0)=5$ 的解。

把 L 作用于(6)的两边，得到

$$L[y'']+4L[y]=4L[x]. \tag{7}$$

利用 $L[x]=1/p^2$，以及(4)和初始条件，(7)式变为

$$p^2L[y]-p-5+4L[y]=4/p^2,$$

即

$$(p^2+4)L[y]=p+5+\frac{4}{p^2},$$

故

$$\begin{aligned}L[y]&=\frac{p}{p^2+4}+\frac{5}{p^2+4}+\frac{4}{p^2(p^2+4)}\\&=\frac{p}{p^2+4}+\frac{5}{p^2+4}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+4}\\&=\frac{p}{p^2+4}+\frac{4}{p^2+4}+\frac{1}{p^2}.\end{aligned} \tag{8}$$

参照第 50 节中得出的变换式，我们看出(8)可写成

$$L[y]=L[\cos 2x]+L[2\sin 2x]+L[x]$$

$$=L[\cos 2x+2\sin 2x+x],$$

故所求的解是

$$y=\cos 2x+2\sin 2x+x.$$

这个结果容易检验，因为可凭观察法看出(6)的通解是

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+x,$$

而从初始条件立即可知 $c_1=1$ 及 $c_2=2$.

这种做法的合法性显然要依靠于这样一个假定，即只有一个函数 $f(x)$以(8)的右边为其拉普拉斯变换式．这在限定 $y(x)$ 为连续函数的情况下是成立的，而微分方程的任何解必然是连续的．当 $f(x)$为连续时，方程 $L[f(x)]=F(p)$常写成

$$L^{-1}[F(p)]=f(x)$$

的形式．通常我们把 L^{-1} 称作**逆拉普拉斯变换**，并把 $f(x)$ 称作 $F(p)$ 的**逆拉氏变换式**．由于L 是线性的，故 L^{-1} 显然也是线性的．在例 1 中我们应用了以下的逆变换式：

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+4}\right]=\cos 2x,\quad L^{-1}\left[\frac{2}{p^2+4}\right]=\sin 2x,\quad L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]=x.$$

这个例子又说明分解成部分分式的方法在求逆变换式时的价值．

为便于读者使用，现把几对有用的变换式列出在下面的表 1 里．对于那些认为在他的工作中需要常用拉普拉斯变换式的人来说，还可以找到内容比这多得多的变换式表．

表1 几对简单的变换式

$f(x)$	$F(p)=L[f(x)]$	$f(x)$	$F(p)=L[f(x)]$
1	$1/p$	$\sin ax$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
x	$1/p^2$	$\cos ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
x^n	$n!/p^{n+1}$	$\sinh ax$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
e^{ax}	$1/(p-a)$	$\cosh ax$	$\frac{p}{p^2-a^2}$

我们还要讲拉普拉斯变换式的一些一般性质，它们能使我们运用表 1 时大大增加灵活性．第一个性质是**平移公式**：

$$L[e^{ax}f(x)]=F(p-a). \tag{9}$$

为证此式，只要注意下面的关系即可：

$$\begin{aligned}L[e^{ax}f(x)]&=\int_0^{\infty}e^{-px}e^{ax}f(x)dx\\&=\int_0^{\infty}e^{-(p-a)x}f(x)dx\\&=F(p-a).\end{aligned}$$

当 $F(p)$ 为已知时，公式(9)可用来求 $e^{ax}f(x)$ 这种形式乘积的变换式，而当 $f(x)$ 为已知，则可求形如 $F(p-a)$ 这种形式函数的逆变换式．

例 2.

$$L[\sin bx]=\frac{b}{p^2+b^2},$$

故

$$L[e^{ax}\sin bx]=\frac{b}{(p-a)^2+b^2}.$$

例 3.

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]=x.$$

故

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p-a)^2}\right]=e^{ax}x.$$

本节所讲方法可用于解常系数线性微分方程组以及某些类型的偏微分方程．关于这方面的其他应用的讨论，可参看篇幅较多的关于拉普拉斯变换式的著作①．

习　题

1. 求下列函数的拉氏变换式：

① 如 R. V. Churchill《算子数学》("Operational Mathematics", 1958 第二版)．

a. x^5e^{-2x}; b. $(1-x^2)e^{-x}$;

c. $e^{3x}\cos 2x$.

2. 求下列函数的逆拉氏变换式:

a. $\frac{6}{(p+2)^2+9}$; b. $\frac{12}{(p+3)^4}$;

c. $\frac{p+3}{p^2+2p+5}$.

3. 用拉氏变换法解下列微分方程:

a. $y'+y=3e^{2x}$, $y(0)=0$;

b. $y''-4y'+4y=0$, $y(0)=0$ 及 $y'(0)=3$;

c. $y''+2y'+2y=2$, $y(0)=0$ 及 $y'(0)=1$;

d. $y''+y'=3x^2$, $y(0)=0$ 及 $y'(0)=1$;

e. $y''+2y'+5y=3e^{-x}\sin x$, $y(0)=0$ 及 $y'(0)=3$.

4. 求微分方程 $y''-2ay'+a^2y=0$ 在初始条件 $y(0)=y_0$ 及 $y'(0)=y_0'$ 未明确规定下的解.(这可对第 17 节里辅助方程有一重根时的解法提供另一种推导法.)

5. 试用(3)建立求一个积分的拉氏变换式公式:

$$L\left[\int_0^x f(x)dx\right]=\frac{F(p)}{p},$$

并通过以两种方法求

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p(p+1)}\right],$$

来验证这个公式.

53. 拉普拉斯变换式的导数和积分

考察一般的拉氏变换公式

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-px}f(x)dx.$$

这里可以在积分号下对 p 微分,得出

$$F'(p)=\int_0^\infty e^{-px}(-x)f(x)dx \tag{1}$$

即

$$L[-xf(x)]=F'(p) \tag{2}$$

再对(1)微分，得到

$$L[x^2 f(x)]=F''(p), \tag{3}$$

而，在更一般情况下，对于任一正整数 n，有

$$L[(-1)^n x^n f(x)]=F^{(n)}(p) \tag{4}$$

在 $F(p)$为已知时，可用这些公式来求形如 $x^n f(x)$ 的函数的变换式.

例 1. 由于$L[\sin ax]=a/(p^2+a^2)$，我们有

$$L[x\sin ax]=-\frac{d}{dp}\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)=\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}.$$

例 2. 从第 51 节我们知道 $L[x^{-\frac{1}{2}}]=\sqrt{\pi/p}$，故

$$L[x^{\frac{1}{2}}]=L[x(x^{-\frac{1}{2}})]=-\frac{d}{dp}\left(\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right)=\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

若把(2)用于函数 $y(x)$及其导数，同时利用公式 52-(3)及 52-(4)，则得

$$L[xy]=-\frac{d}{dp}L[y]=-\frac{dY}{dp}, \tag{5}$$

$$L[xy']=-\frac{d}{dp}L[y']=-\frac{d}{dp}[pY-y(0)]=-\frac{d}{dp}[pY], \tag{6}$$

及

$$L[xy'']=-\frac{d}{dp}L[y'']=-\frac{d}{dp}[p^2Y-py(0)-y'(0)]$$

$$=-\frac{d}{dp}[p^2Y-py(0)]. \tag{7}$$

这些公式有时可用来解系数为自变量的一次式的线性微分方程.

例 3. 零阶贝塞耳方程是

$$xy''+y'+xy=0. \tag{8}$$

已知它有一个适合 $y(0)=1$ 的解 $y(x)$. 为求此解，可将 L 作用于(8)并应用(5)及(7)，得到

$$-\frac{d}{dp}[p^2Y-p]+pY-1-\frac{dY}{dp}=0$$

或

$$(p^2+1)\frac{dY}{dp}=-pY \tag{9}$$

把(9)分离变量并积分，得到

$$Y=\frac{c}{\sqrt{p^2+1}}=c(p^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{c}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

用二项级数

$$(1+z)^a=1+az+\frac{a(a-1)}{2!}z^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3+\cdots$$

$$+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}z^n+\cdots$$

来展开 $(p^2+1)^{-\frac{1}{2}}$，(10)就成为

$$Y=\frac{c}{p}\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p^4}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p^6}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n n!}\frac{(-1)^n}{p^{2n}}+\cdots\right]$$

$$=c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}.$$

现若按形式手续逐项计算这一级数的逆变换式，则得

$$y(x)=c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$$

$$=c\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots\right).$$

由于 $y(0)=1$，故 $c=1$，得所求解为

$$y(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots$$

这个级数定义了重要的贝塞耳函数 $J_0(x)$，而我们这里求得了它的拉氏变换式是 $1/\sqrt{p^2+1}$．在第六章里我们用完全不同的观点对 $J_0(x)$

进行了详细讨论，现在可以看到用拉氏变换法来得出它是多么容易.

现在来讨论对变换式进行积分的问题，这里主要的结果是

$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\int_p^{\infty}F(p)dp. \tag{11}$$

为证此式，令 $L[f(x)/x]=G(p)$. 对它用一次(2)，得到

$$\frac{dG}{dp}=L\left[(-x)\frac{f(x)}{x}\right]=-L[f(x)]=-F(p),$$

故

$$G(p)=-\int_a^p F(p)dp,$$

其中 a 为某一数. 由于我们要使 $p\to\infty$ 时 $G(p)\to 0$，故取 $a=\infty$ 而得

$$G(p)=\int_p^{\infty}F(p)dp,$$

这就是(11). 当 $F(p)$ 已知，对于形式为 $f(x)/x$ 的函数，可用这个公式来求它们的变换式. 又，若把(11)写成

$$\int_0^{\infty}e^{-px}\frac{f(x)}{x}dx=\int_p^{\infty}F(p)dp$$

并令 $p\to 0$，则得

$$\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx=\int_0^{\infty}F(p)dp, \tag{12}$$

只要左边的积分存在，这个式子总成立. 有时也可用它来计算一些难于用其他方法处理的积分.

例 4. 由于 $L[\sin x]=1/(p^2+1)$，用(12)可得

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\infty}\frac{dp}{p^2+1}=\tan^{-1}p\,\Big]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

为便于查阅，我们把拉普拉斯变换式的一些主要通用性质列表于下. 注意表中最后一项性质是新的. 这一公式及其应用我们将在下一节中讨论.

表 2 $L[f(x)]=F(p)$的一些通用性质

$$L[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha F(p)+\beta G(p)$$
$$L[e^{ax}f(x)]=F(p-a)$$
$$L[f'(x)]=pF(p)-f(0);$$
$$L[f''(x)]=p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$$
$$L\left[\int_0^x f(x)dx\right]=\frac{F(p)}{p}$$
$$L[-xf(x)]=F'(p);$$
$$L[(-1)^n x^n f(x)]=F^{(n)}(p)$$
$$L\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\int_0^\infty F(p)dp$$
$$L\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right]=F(p)G(p)$$

习 题

1. 试证

$$L[x\cos ax]=\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2},$$

并利用这个结果求

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2+a^2)^2}\right].$$

2. 求下列各变换式

a. $L[x^2\sin ax]$

b. $L[x^{\frac{3}{2}}]$.

3. 解下列微分方程:

a. $xy''+(3x-1)y'-(4x+9)y=0$, $y(0)=0$;

b. $xy''+(2x+3)y'+(x+3)y=3e^{-x}$, $y(0)=0$.

4. 若 $y(x)$ 满足微分方程

$$y''+x^2y=0,$$

其中 $y(0)=y_0$ 及 $y'(0)=y_0'$, 试证它的变换式 $Y(p)$ 满足方程

$$Y''+p^2Y=py_0+y_0'.$$

注意第二个微分方程同第一个属于同一类型，因此毫无进展可言，例 3 所讲的方法只有对系数为一次式的微分方程才能用之有效.

5. 若 a 及 b 为正的常数, 计算下列积分:

a. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$;

b. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx}{x}dx$.

6. 用形式步骤证明

a. $\int_0^\infty J_0(x)dx=1$;

b. $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos t)dt$.

7. 若 $x>0$, 试用形式步骤证明

a. $f(x)=\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}dt=\frac{\pi}{2}$;

b. $f(x)=\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}e^{-x}$.

8. a. 若 $f(x)$是周期 a 的周期函数: $f(x+a)=f(x)$, 试证

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^a e^{-px}f(x)dx.$$

b. 若 $f(x)=1$(当 $0\leqslant x\leqslant 1$, $2\leqslant x\leqslant 3$, $4\leqslant x\leqslant 5$, 等等), 在其余区间上 $f(x)=0$, 试求 $F(p)$.

54. 卷积及阿倍耳力学问题

若 $L[f(x)]=F(p)$及 $L[g(x)]=G(p)$, 则 $F(p)G(p)$的逆变换式是什么?

为通过形式运算来回答这一问题, 可在定义变换式的积分里把临时变量记为 s 及 t, 写出

$$\begin{aligned}F(p)G(p)&=\left[\int_0^\infty e^{-ps}f(s)ds\right]\left[\int_0^\infty e^{-pt}g(t)dt\right]\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-p(s+t)}f(s)g(t)dsdt\\&=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-p(s+t)}f(s)ds\right]g(t)dt,\end{aligned}$$

这里的积分域是 st 平面的第一象限($s\geqslant 0$, $t\geqslant 0$). 现在在最后一式的内积分里令 $s=x-t$ 引入新变量 $x=s+t$, 于是(由于在这一次积分时 t 是固定的)$ds=dx$. 这样我们可以写出

$$F(p)G(p)=\int_0^\infty\left[\int_t^\infty e^{-px}f(x-t)dx\right]g(t)dt$$
$$=\int_0^\infty\int_t^\infty e^{-px}f(x-t)g(t)dxdt.$$

这里的积分域是 xt 平面第一象限的头半部($x-t\geqslant 0$). 若如图 75 所示那样改变积分次序，则得

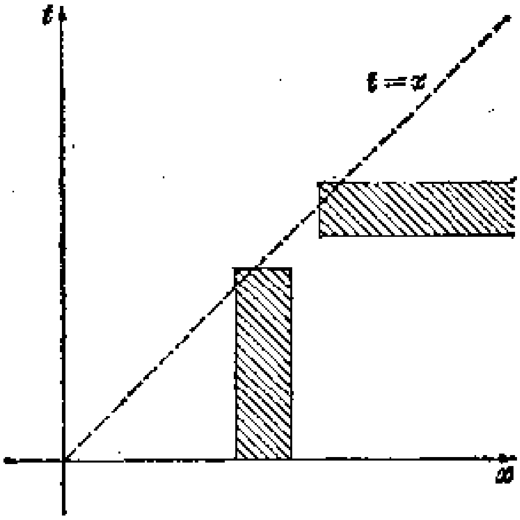


图 75

$$F(p)G(p)=\int_0^\infty\left[\int_0^x e^{-px}f(x-t)g(t)dt\right]dx$$
$$=\int_0^\infty e^{-px}\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right]dx$$
$$=L\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right].$$

最后这个式子里的积分是积分上限 x 的函数，它提供我们这个问题的解答. 这个积分叫函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**卷积**. 它可以看作是这两个函数的"广义乘积".

卷积可用来求逆变换式. 例如，由于 $L[x]=1/p^2$ 及 $L[\sin x]=1/(p^2+1)$，我们有

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p^2+1)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right]$$
$$=\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$$

$$=x-\sin x,$$

这容易用部分分式加以验证．还有一类更有意义的应用如下．若 $f(x)$ 及 $k(x)$ 是给定的函数，则未知函数 $y(x)$ 出现在积分号下的一个方程

$$f(x)=y(x)+\int_0^x k(x-t)y(t)dt \tag{1}$$

叫积分方程．这里的积分是函数 $k(x)$ 及 $y(x)$ 的卷积，由于这一特殊形式，这个方程可用拉氏变换来求解．事实上，若将 L 作用于方程(1)的两边，则得

$$L[f(x)]=L[y(x)]+L[k(x)]L[y(x)]$$

故

$$L[y(x)]=\frac{L[f(x)]}{1+L[k(x)]}. \tag{2}$$

(2)的右边该是 p 的一个已知函数；如能认出它是什么样函数的变换式，那就得出了解 $y(x)$．

例 1. 积分方程

$$y(x)=x^3+\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt \tag{3}$$

就是这一类型的方程，把 L 作用于它，得到

$$L[y(x)]=L[x^3]+L[\sin x]L[y(x)],$$

解出 $L[y(x)]$，得到

$$L[y(x)]=\frac{L[x^3]}{1-L[\sin x]}=\frac{3!/p^4}{1-1/(p^2+1)}$$

$$=\frac{3!}{p^4}\left(\frac{p^2+1}{p^2}\right)=\frac{3!}{p^4}+\frac{3!}{p^6},$$

故(3)的解是

$$y(x)=x^3+\frac{1}{20}x^5.$$

作为说明这种解法的另一个例子，我们来考察力学中引出上述那类积分方程的一个古典问题．设有一根铁丝弯成一个光滑曲线(图76)，并设有质量为 m 的一个串珠在它自身重量的作用下，从静止状态

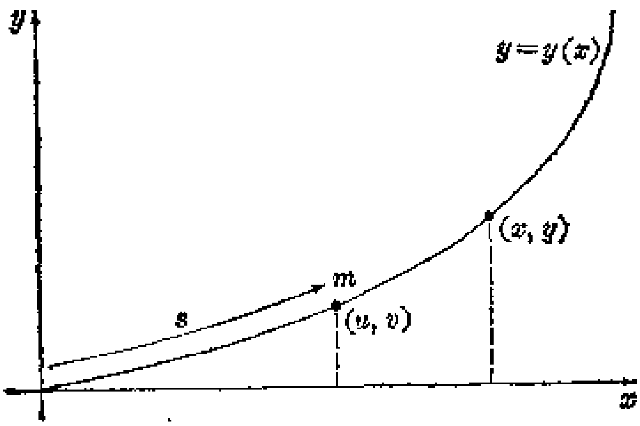


图　76

沿铁丝无阻力地下滑到原点处．假设(x, y)是起点，(u, v)是中途任何一点．若铁丝的形状由函数$y=y(x)$给出，则下落所需的总时间将是串珠原有高度y的函数$T(y)$．阿倍耳力学问题是它的逆命题：预先规定了函数$T(y)$，然后求铁丝的形状，使下降的总时间等于这个$T(y)$．

为把这个问题写成数学形式，我们从能量守恒原理出发：

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=mg(y-v) \quad 或 \quad -\frac{ds}{dt}=\sqrt{2g(y-v)}$$

这可以写成

$$dt=-\frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}}.$$

把上式从$v=y$积分到$v=0$，得到

$$T(y)=\int_{v=y}^{v=0}dt=\int_0^y\frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^y\frac{s'(v)dv}{\sqrt{y-v}}. \tag{4}$$

但若曲线$y=y(x)$已知，则

$$s=s(y)=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy$$

总能知道，故它的导数

$$f(y)=s'(y)=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \tag{5}$$

也是知道的．若把(5)代入(4)，则可得

$$T(y)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^y\frac{f(v)dv}{\sqrt{y-v}},\tag{6}$$

因此只要曲线给出就总能算出 $T(y)$. 在阿倍耳问题里，我们是要在 $T(y)$ 给定时求曲线；从这个观点来说，方程(6)中的函数 $f(y)$ 是未知的，而(6)本身就叫**阿倍耳积分方程**. 注意(6)中的积分就是函数 $y^{-\frac{1}{2}}$ 与 $f(y)$ 的卷积, 故若将拉氏变换作用于(6), 便得

$$L[T(y)]=\frac{1}{\sqrt{2g}}L[y^{-\frac{1}{2}}]L[f(y)]$$

如果我们还记得 $L[y^{-\frac{1}{2}}]=\sqrt{\pi/p}$, 则从上式可得

$$\begin{aligned}L[f(y)]&=\sqrt{2g}\frac{L[T(y)]}{\sqrt{\pi/p}}\\&=\sqrt{\frac{2g}{\pi}}p^{\frac{1}{2}}L[T(y)].\end{aligned}\tag{7}$$

当 $T(y)$ 给定, 方程(7)的右边便成为 p 的一个已知函数, 因此就有希望通过取它的逆变换式而求得 $f(y)$. 知道了 $f(y)$ 便可解出微分方程(5)而求得曲线.

作为一个具体的例子，我们专门来讨论 $T(y)$ 为一常数 T_0 时的情形. 这一假定的意思是说下降时间不依赖于出发点. 由这一性质所确定的曲线叫**等时线**(tauto-chrone), 因此我们的问题是求出这等时线. 在这情形下, (7)变成

$$L[f(y)]=\sqrt{\frac{2g}{\pi}}p^{\frac{1}{2}}L[T_0]=\sqrt{\frac{2g}{\pi}}p^{\frac{1}{2}}\frac{T_0}{p}=b^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{p}},$$

其中 $b=2gT_0^2/\pi^2$. $\sqrt{\pi/p}$ 的逆变换式是 $y^{-\frac{1}{2}}$, 故有

$$f(y)=\sqrt{b/y}.\tag{8}$$

把这个 $f(y)$ 代入后, 从(5)得出曲线的微分方程为

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=b/y,$$

故得

$$x=\int\sqrt{\frac{b-y}{y}}dy.$$

以 $y=b\sin^2\phi$ 代入后，上式变为

$$x=2b\int\cos^2\phi d\phi=b\int(1+\cos2\phi)d\phi$$

$$=\frac{b}{2}(2\phi+\sin2\phi)+c,$$

故得

$$x=\frac{b}{2}(2\phi+\sin2\phi)+c \quad 及 \quad y=\frac{b}{2}(1-\cos2\phi). \tag{9}$$

这一曲线必须过原点(0,0)，故 $c=0$；若令 $a=b/2$，$\theta=2\phi$，则(9)可写成较简形式

$$x=a(\theta+\sin\theta) \quad 及 \quad y=a(1-\cos\theta).$$

上式是图 77 所示摆线的参量方程．这一曲线是由半径为 a 的圆上一定点当圆在图中水平虚线 $y=2a$ 之下沿虚线滚动时生成的．由于 $2a=b=2gT_0^2/\pi^2$，故生成圆的直径由那个等于常数的下降时间所确定．

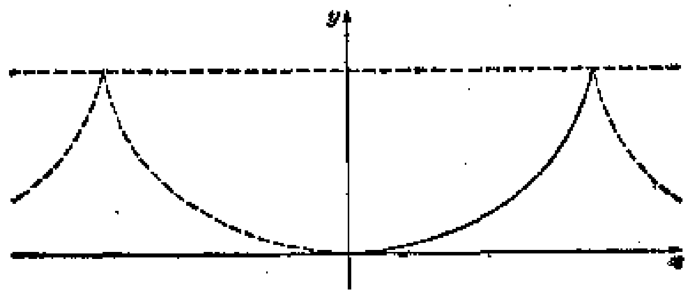


图　77

所以等时曲线是个摆线．我们在习题 6-2 及 11-4 中曾用其他方法验证了摆线的这个性质．现在这个讨论的优点是可以求出等时线而无需事先知道答案是什么．

习　题

1．用卷积求 $L^{-1}[1/(p^2+a^2)^2]$．（参看题 53－1.）

2．解下列积分方程：

a. $y(x)=1-\int_0^x (x-t)y(t)dt$;

b. $y(x)=e^x\left[1+\int_0^x e^{-t}y(t)dt\right]$;

c. $e^{-x}=y(x)+2\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt$;

d. $3\sin 2x=y(x)+\int_0^x (x-t)y(t)dt$.

3. 从方程(7)推出

$$f(y)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{T(t)dt}{\sqrt{y-t}},$$

并在 $T(y)$ 为一常数 T_0 的情形下利用上式来验证(8).

4. 若 $T(y)=k\sqrt{y}$ (k 为某一常数), 求下降曲线的方程.

5. 试证微分方程

$$y''+a^2y=f(x),\quad y(0)=y'(0)=0,$$

的解是

$$y(x)=\frac{1}{a}\int_0^x f(t)\sin a(x-t)dt.$$

附录 A. 拉普拉斯

拉普拉斯(Pierre Simon de Laplace, 1749—1827)是法国数学家兼理论天文学家, 他在当时负盛名, 被称为法国的牛顿. 他一生的主要兴趣在天体力学, 概率论, 以及个人的升官发财.

他在 24 岁时就已经详细应用牛顿引力定律深人研究整个太阳系, 其中各行星及其卫星的运动不仅受太阳制约, 而且以难以捉摸的多种方式彼此互相影响. 甚至牛顿也曾经认为, 要使这一复杂的机构免于陷入混乱, 需要有上帝不时加以干予. 拉普拉斯决心要从别的方面寻求这一保证, 并终于能够证明, 从数学上所理解的这个理想的太阳系是个稳恒的动力系统, 它能永世保持不变. 这不过是他在其不朽著作《天体力学》中所记录下来的一长串胜利成果之一, 这书总结了几代著名数学家在引力理论方面的研究工作 (从 1799 到 1825 年分五卷出版). 不幸有损于他后日声誉的是, 他完全不提前人和同时代人的发现, 给人以

书中思想完全出自他一人的印象. 关于这本书有许多传说. 其中最熟知的是有一次拿破仑想给拉普拉斯提级，说他写了一部关于世界体系的巨著，但未提到上帝是宇宙的创造者. 据传拉普拉斯回答说，"陛下，我不需要作那个假设."《天体力学》传给后代的主要财富是他对势论作出了大量的论述，对物理科学的十几门不同的分支——从引力论到流体力学、电磁学以及原子物理学，产生了深远的影响. 尽管他不声不响地从拉格朗日那里取用了位势概念，他把这一概念用得如此广泛深入，以致于从他那时起，势论中的基本微分方程被人称作拉普拉斯方程.

他的另一巨著是《关于概率的解析理论》(1812)，其中他把自己在概率论上的发现同以前 40 年间的发现结合起来. 这里他又没有提及许多思想是别人的发现而把它们同自己的思想混在一起；然而即使有这些不足之处，一般公认这书是任何单独一个人所能做出的对这门数学的最大贡献. 他在该书的引言中说道："归根到底，概率论只不过是把常识化成计算而已."这话可能不假，但在其后 700 页繁复的分析中，他信手运用拉普拉斯变换、生成函数以及其他许多远非等闲的数学工具，曾被一些人说其内容的复杂程度甚至超过《天体力学》.

法国大革命兴起后，拉普拉斯的政治才能和权势贪欲开始大显身手. 法国人讥诮地说起他作为一名政客的"随遇而安"和"左右逢源". 这些话的实际意义是指每逢政权易手（当时次数很多），拉普拉斯总能改变他的宗旨——反复不断地扮演激情的共和派与摇尾谄媚的保皇派角色——安然顺应，每次改宗后总能使他获得更好的差使和更大的头衔. 有人恰如其份地把他比做英国文学作品中的假圣人布雷牧师. 此人当过两次天主教徒和两次基督教徒. 当有人责问这位牧师为什么改宗，据说他是这样回答的："不，我并没有改信哪个教，因为如果说我改变宗教，那是因为我能保证忠于我的原则，这就是从生到死一辈子当布雷这个地方的牧师."

拉普拉斯虽有这些缺点但也有优点，他总是乐于慷慨帮助和鼓励

年青科学家的. 他时时帮助提拔象化学家盖吕萨克，旅行家和自然研究者洪堡尔晓，物理学家布瓦桑这样的人，并且适时地帮助了年青的柯西，而这人注定要成为十九世纪数学的主要建筑师之一.

附录 B. 阿倍耳

阿倍耳(Niels Henrik Abel, 1802—1829)是十九世纪最先进的数学家之一，而且也许是斯堪的纳维亚地区国家所曾出现过的最大天才. 他和他的同时代人高斯和柯西一起，是发展近世数学(其特征为坚持要有严格证明)的一位先锋战士. 他一生在贫穷与受冷遇煎熬下乐天知命，对其短促成熟期间的许多杰出成就怀着谦逊的自得其乐的心情，以及面临着早夭命运期间恬然置生死于度外的胸怀. 他的一生就是这种命运的辛辣混合物.

阿倍耳是挪威乡村穷教士家的六个孩子之一. 他的巨大的才能是在他只有十六岁时被一位教师所发现与激发起来的，不久他就阅读和深钻牛顿、欧拉及拉格朗日的著作. 他在其后的数学笔记本空白处记下的这么一句话可作为他对这种经验的感想和体会："我觉得如果要想在数学上取得进展，就应该阅读大师而不是门徒的著作."阿倍耳刚十八岁，他父亲就去世，留下贫苦无依的一家. 他们靠着朋友和邻居的资助苦度日子，而阿倍耳在几位教授的出资捐助下，勉为其难地于 1821 年进奥斯陆大学. 他最早的研究论文发表于 1823 年，其中包括用积分方程解古典的等时线问题，即我们在第 54 节中所讨论的内容. 这是对这类方程的第一个解法，为积分方程在十九世纪末二十世纪初的广泛发展开阔先河. 他又证明一般的五次方程 $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ 不能像较低次的方程那样用根号求解，从而解脱了困惑数学家 300 年之久的一个难题. 他自己出资以小册子印发了他的证明.

阿倍耳在科学思想上的发展很快超过了挪威当地所能理解的水平，因此他渴望出访法、德. 在他的朋友和教授的支持下，他向政府申请出国，经过例行的官僚主义繁文缛节和拖延之后，他终于获得周游大

陆的数学公费．他把第一年的大部分时间花在柏林．那里他很有幸地结识了克雷勒(Angust Leopold Crelle)，这是一位热情的业余数学爱好者，成为他的知友顾问和保护者．阿倍耳则启导克雷勒开始创办他那举世闻名的《纯粹与应用数学学报》(Journal für die Reine und Angewandte Mathematik)，这是世界上专载数学研究的第一个期刊．该刊头三期里登载了阿贝耳的 22 篇文章．

阿倍耳的早期数学训练完全属于以欧拉为典型的十八世纪老式形式主义传统．在柏林他受到以高斯和柯西为首的新学派思想的影响，它所注重的是严格推导而不是形式运算．除了高斯关于超几何级数的伟大工作之外，当时分析上几乎没有什么证明在今日被人认为是能够站得住脚的．如阿倍耳在给朋友的一封信中所说的："如果不计那些很简单的情形，整个数学里没有一个无穷级数的和是严格确定了的．换言之，数学里最重要的部门没有坚实基础．"在这时期他写出了关于二项级数的古典研究论文，那里他奠定了收敛的一般理论，第一次给出了这种级数展开式成立的可靠证明．

阿倍耳把他关于五次方程的小册子寄给格廷根的高斯，想借此作为晋谒高斯的通行证．但由于某种原因高斯却放下根本没有看，因在他死后 30 年人们发现遗稿中有这本小册子还没有裁开．这对两人都是不幸的事，阿倍耳觉得他受人冷遇，决心不再想见高斯而径去巴黎．

在巴黎他会见了柯西、勒让特、狄利克雷和其他的人，但这些会面也是虚应故事，人们并没有真正认识他的天才．他已经在克雷勒的《学报》里发表了一些重要的论文，但法国人几乎完全不知道有这个新刊物，而阿倍耳又太靦覥，不好意思在陌生人面前谈他自己的著作．在到达巴黎后不久他完成了他的巨著《论一类极广泛的超越函数的一般性质》(Mémoire sur une Propriété Générale d'une Classe Tréo Étendue des Fonctions Transcendantes)，他自己也认为这是他的杰作．这著作里含有他所发现的关于代数函数的积分，如今称为阿倍耳定理，并其后成为阿倍耳积分理论，阿倍耳函数以及代数几何里许多内

容的基础. 据传厄尔米特在几十年之后提到这部著作时曾说:"阿倍耳留下来的问题, 足够数学家忙 500 年的."雅可比把阿倍耳定理描述为十九世纪积分学中的最大发现.阿倍耳把稿件送交法国科学院.他希望这能引起法国数学家对他的注意,但他空等了一些时候,终于因阮囊羞涩而不得不返回柏林.事情的经过是这样的:稿件被人交给柯西和勒让特审阅; 柯西带了回家错放在什么地方一点也记不起了; 后来直到 1841 年才付印, 但在清样未打出以前原稿又丢失了. 这原稿终于在 1952 年在佛罗伦萨发现①. 在柏林, 阿倍耳完成了关于椭圆函数的第一篇革命性论文(这是他搞了多年的一项研究),然后回到挪威,背了一身债.

他原希望回国后能被聘为大学教授, 但他的希望又一次落空. 他靠给私人补课谋生,一度当代课教师. 这段时期里他不断搞研究工作,主要搞椭圆函数论, 这是作为椭圆积分的反函数而为他所发现的. 这一理论很快就成为十九世纪分析中的重要领域之一,它对于数论、数学物理以及代数几何有许多应用.同时,阿倍耳的名声传遍到欧洲的所有数学中心,成为世界优秀的数学家之一, 但他身处孤陋寡闻之地, 自己并不知道. 到 1829 年初,他在旅途中所染的肺病已经发展到使他不能工作的地步,并且就在是年春他 26 岁的时候去世. 作为命运捉弄人的一件后文是,在他死后不久, 克雷勒写信告诉他所谋之事获得成功, 阿倍耳将被聘为柏林大学的数学教授.

克雷勒在他的《学报》里用以下的话赞扬阿倍耳:"阿倍耳在他的所有著作里都打下了天才的烙印和表现出了不起的思维能力. 我们可以说他能够穿透一切障碍深入问题的根柢, 具有似乎是无坚不摧的气势…. 他又以品格纯朴高尚以及罕见的谦逊精神出众, 使他人品也像他的天才那样受人不同寻常的爱戴."但数学家另有他法来纪念他们之中的伟人,因而我们常说阿倍耳积分方程, 阿倍耳积分与阿倍耳函数, 阿

① 关于这一惊人故事的详情可参看 O. Ore 写的一本好书《阿倍耳: 非凡的数学家》("Niels Henrik Abel: Mathematician Extraordinary", 1957).

倍耳群，阿倍耳级数，阿倍耳部分和公式，幂级数里的阿倍耳极限定理，以及阿倍耳可和性．很少几个数学家能使他的名字同近世数学中的这么多概念和定理联在一起的，谁也不能想象，如果他活到正常寿命的话该能作出多少贡献来。

第十一章　解的存在及唯一性

55. 逐次逼近法

本书里不断提到的一个思想是，只有少数几类简单的微分方程可用已知初等函数的显式解出．我们在头三章里讲了些这种类型的微分方程．在第五章里详细论述了能用幂级数表达其解的那些二阶线性方程．然而许多微分方程都在那些类型方程的范围之外，而我们所讲过的一切方法都看不出有处理这种情况的可能．

首先我们来观察第 2 节中所述的初值问题：

$$y'(x)=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0, \tag{1}$$

这里 $f(x,y)$ 是定义于点 (x_0,y_0) 的某个邻域上的任意连续函数．用几何语言来说，我们的目的是要想出构造一个函数 $y(x)$ 的方法，使函数的图形通过点 (x_0,y_0)，并在 x_0 的某一邻域上满足微分方程 $y'=f(x,y)$（图 78）．我们已经有思想准备，知道初等办法行不通，而且一般需要用到某种无穷步骤．

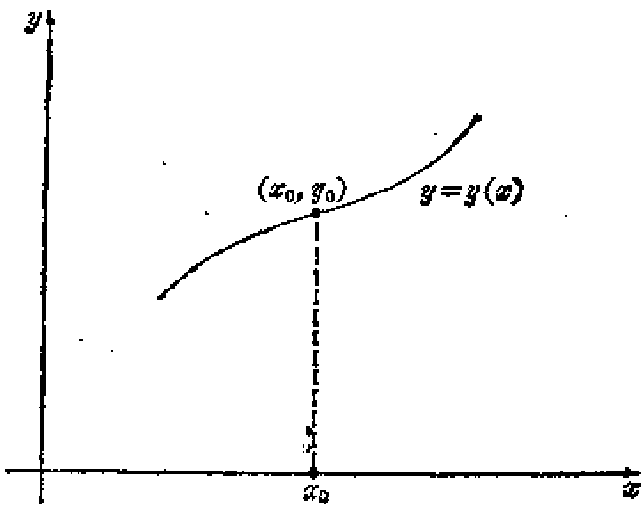


图 78

所述方法提供微分方程的一种解法，它同读者所见到过的很不一样．这一方法的关键在于将初值问题(1)换成等价的积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt. \tag{2}$$

这叫做积分方程，因为未知函数出现在积分号下面. 为看出(1)和(2)确实是等价的，假定 $y(x)$是(1)的解. 于是 $y(x)$自然是连续函数，从而

$$y'(x)=f[x, y(x)]$$

的右边是 x 的一个连续函数；而当我们把它从 x_0 积分到 x 并利用$y(x_0)=y_0$，结果便是(2). 照例，我们在(2)中用 t 表示临时变量，以免同可变积分上限 x 相混淆. 于是(1)的任一个解是(2)的一个连续解. 反之，若 $y(x)$是(2)的一个连续解，则 $y(x_0)=y_0$，因 $x=x_0$时积分等于0，并且将(2)微分后还原到微分方程 $y'(x)=f[x, y(x)]$. 这些简单的论证说明(1)及(2)在下述意义上为等价：(1)的解(如果存在的话)正好就是(2)的连续解. 特别是，如果我们能作出(2)的一个连续解，自然而然地就得到(1)的一个解.

现在我们来看用迭代法求解(2)的问题. 这就是，我们先从一个粗略近似解开始，然后用一种可以反复施行的运算逐步加以改进，以期尽可能接近精确的解. (2)之所以优于(1)，主要在于积分方程给这套做法提供一个方便的机构，其详如下.

常数函数 $y_0(x)=y_0$ 给出一个粗略的近似解，这无非就是通过点(x_0, y_0)的一个水平直线. 我们把这个近似解代入方程(2)的右边，以期得到一个新的并且也许是更好的近似解 $y_1(x)$如下：

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt.$$

第二步是按同样方法用 $y_1(x)$来得出另一个也许甚至更好的近似解 $y_2(x)$：

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)]dt.$$

这样做到第 n 步，得到

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]dt. \tag{3}$$

这套步骤叫毕卡逐次逼近法①．我们通过几个实例来看它是怎样做的．

最简单的初值问题

$$y'=y,\quad y(0)=1$$

的解显然是$y(x)=e^x$．等价的微分方程是

$$y(x)=1+\int_0^x y(t)dt,$$

这时(3)变为

$$y_n(x)=1+\int_0^x y_{n-1}(t)dt.$$

这里的 $y_0(x)=1$, 易知

$$y_1(x)=1+\int_0^x dt=1+x$$

$$y_2(x)=1+\int_0^x (1+t)dt=1+x+\frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x)=1+\int_0^x\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)dt=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot 3},$$

而一般有

$$y_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

在这个例子的情形下，逐次逼近的结果确实收敛于确切解，因为这些逐次逼近的结果就是 e^x 的幂级数展开式的部分和.

现在我们来考察下面的问题:

$$y'=x+y,\quad y(0)=1. \tag{4}$$

这是个一阶线性方程，容易求得满足所给初始条件的解是 $y(x)=2e^x-$

① 毕卡(Emile Picard, 1856—1941)是过去一世纪中法国最杰出的数学家之一，在分析上有两个突出的贡献：他的逐次逼近法，使他能改善柯西在 1820 年所首创的微分方程理论；他的关于一个复值解析函数在一本质奇异点附近所取值的著名定理(叫毕卡大定理)，这定理直到今日还激发了许多重要的研究工作．他是个地道的法国人，善于品味，爱好美食，特别喜欢吃法国东南部布罗温司地方的鲜鱼大蒜汤.

$x-1$. 等价的积分方程是

$$y(x)=1+\int_0^x [t+y(t)]dt,$$

这里的(3)是

$$y_n(x)=1+\int_0^x [t+y_{n-1}(t)]dt.$$

这里的 $y_0(x)=1$, 用毕卡方法得出

$$y_1(x)=1+\int_0^x (t+1)dt=1+x+\frac{x^2}{2!},$$

$$y_2(x)=1+\int_0^x \left(1+2t+\frac{t^2}{2!}\right)dt=1+x+x^2+\frac{x^3}{3!},$$

$$y_3(x)=1+\int_0^x \left(1+2t+t^2+\frac{t^3}{3!}\right)dt$$

$$=1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4!},$$

$$y_4(x)=1+\int_0^x \left(1+2t+t^2+\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4!}\right)dt$$

$$=1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{5!},$$

而一般有

$$y_n(x)=1+x+2\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

这显然收敛于

$$1+x+2(e^x-x-1)+0=2e^x-x-1,$$

故仍然得到精确解.

尽管看了这些例子，读者可能还不会完全相信毕卡方法的实用价值. 例如，要是逐次做的积分运算很复杂，甚或除了原理上以外根本不能算出，那该怎么办？ 这种怀疑态度是有充分理由的，因为毕卡方法的真实功效是在微分方程的理论上(而不在于实际求解)，在于其能在很一般的条件下，证明一个初值问题有解，而且这个解是唯一的. 提出这

类明确判断的定理叫存在及唯一性定理. 我们在下面两节里要证明几个这样的定理.

习　　题

1. 求初值问题

$$y'=y^2,\qquad y(0)=1$$

的精确解. 从 $y_0(x)=1$ 开始, 应用毕卡方法算出 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$, 将这些结果同精确解进行比较.

2. 求初值问题

$$y'=2x(1+y),\qquad y(0)=0$$

的精确解. 从 $y_0(x)=0$ 出发, 算出 $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)$, 并把这些结果同精确解进行比较.

3. 如果初始逼近函数不取常数函数 $y_0(x)=y_0$ 而选取另一个函数, 看看毕卡方法仍然可以行得通, 这对学习很有好处. 试以下列各函数为初始逼近函数, 用毕卡法解初值问题(4):

a. $y_0(x)=e^x$;　　b. $y_0(x)=1+x$;

c. $y_0(x)=\cos x$.

56. 毕卡定理

如上节末所指出的, 毕卡逐次逼近法的主要价值在于它对微分方程理论上的贡献. 这一贡献在下面基本定理的证明中可以看得最清楚.

定理 A. (**毕卡定理**) 设 $f(x, y)$ 及 $\partial f/\partial y$ 在多边平行于坐标轴的闭矩形 R 上是 x 及 y 的连续函数(图 79). 若 $f(x_0, y_0)$ 是 R 的任一内点, 则存在一数 $h>0$, 使初值问题

$$y'=f(x, y),\quad y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上有唯一的解 $y=y(x)$.

证明. 论证相当长而且复杂, 最好是分成容易消化的几个阶段来讲.

第一, 我们知道(1)的每个解也是积分方程

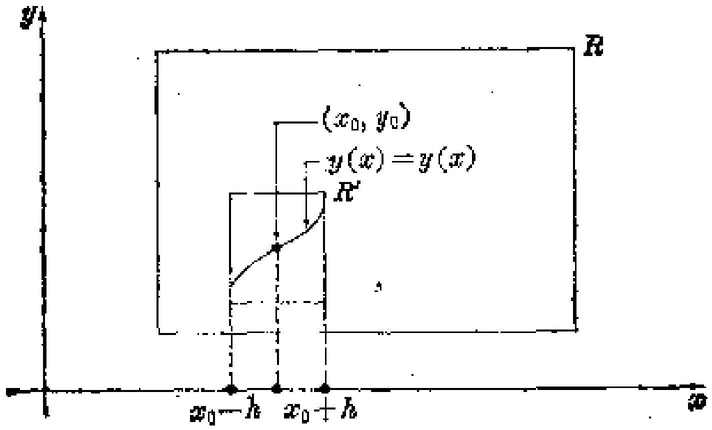


图 79

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt \tag{2}$$

的一个连续解，反之亦然．这使我们可以断言(1)在区间$|x-x_0|\leqslant h$上具有唯一解，当且仅当(2)在同一区间上具有唯一连续解．在第55节里，我们提供了一些例证，说明由下列步骤所定义的函数序列$y_n(x)$:

$$\begin{aligned}
&y_0(x)=y_0\\
&y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_0(t)]dt,\\
&y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)]dt,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]dt,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{3}$$

收敛于(2)的一个解．其次我们指出，$y_n(x)$是下列函数项级数的第n个部分和:

$$y_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[y_n(x)-y_{n-1}(x)]=y_0(x)+[y_1(x)-y_0(x)]$$
$$+[y_2(x)-y_1(x)]+\cdots+[y_n(x)-y_{n-1}(x)]+\cdots, \tag{4}$$

故序列(3)的收敛问题等价于这个级数的收敛问题．为完成证明，我们取一个数$h>0$来确定区间$|x-x_0|\leqslant h$，然后证明在这区间上，下列命

题成立: (i)级数(4)收敛于一个函数 $y(x)$; (ii)$y(x)$是(2)的一个连续解; (iii)$y(x)$是(2)的唯一连续解.

定理中的假定是用来得出正数 h 的, 其法如下. 我们假定 $f(x,y)$ 及 $\partial f/\partial y$ 是矩形 R 上的连续函数. 但 R 是闭(即包括其边界在内)和有界的, 故每个函数必在 R 上有界. 这说明存在常数 M 及 K, 使对于 R 内的所有点 (x,y) 有 f

$$|f(x,y)|\leqslant M \tag{5}$$

及

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right|\leqslant K. \tag{6}$$

其次我们指出, 若 (x,y_1) 及 (x,y_2) 是 R 内有同一 x 坐标的两个不同的点, 则由中值定理可知

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\frac{\partial}{\partial y}f(x,y^*)\right||y_1-y_2|, \tag{7}$$

其中 y^* 为 y_1 与 y_2 之间的某个数. 从(6)及(7)显然可知, 对于 R 内在同一纵线上的任何两点 (x,y_1) 及 (x,y_2) (不管其是否为同一个点), 都有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant K|y_1-y_2|. \tag{8}$$

现在取任一正数 h 使其合乎

$$Kh<1, \tag{9}$$

于是由不等式 $|x-x_0|\leqslant h$ 及 $|y-y_0|\leqslant Mh$ 所定的矩形 R' 包含在 R 内. 由于 (x_0,y_0) 是 R 的一个内点, 故不难看出这样的一个 h 是存在的. 为什么要提出这些看来似乎古怪的要求, 它的理由自然可以随着证明过程的继续进行而看出来.

从这以后, 我们把注意力限定在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上. 为证明(i), 只要证明级数

$$|y_0(x)|+|y_1(x)-y_0(x)|+|y_2(x)-y_1(x)|$$
$$+\cdots+|y_n(x)-y_{n-1}(x)|+\cdots \tag{10}$$

收敛; 而为证(10)收敛, 我们来估计项 $|y_n(x)-y_{n-1}(x)|$ 的值. 首先必

须指出的是，每个函数 $y_n(x)$ 的图形都在 R' 内从而也在 R 内．这对 $y_0(x)=y_0$ 是清楚的，故点 $[t, y_0(t)]$ 都在 R' 内，从(5)得出 $|f[t, y_0(t)]|\leqslant M$，于是

$$|y_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f[t, y_0(t)]dt\right|\leqslant Mh,$$

这就对 y_1 证明了我们所指出的事．从这个不等式又可知点 $[t, y_1(t)]$ 在 R' 内，故 $|f[t, y_1(t)]|\leqslant M$，于是

$$|y_2(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)]dt\right|\leqslant Mh.$$

同样，

$$|y_3(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f[t, y_2(t)]dt\right|\leqslant Mh,$$

等等．现在来估计 $|y_n(x)-y_{n-1}(x)|$ 的值．由于闭区间上的一个连续函数有一极大值，而 $y_1(x)$ 是连续的，故可拿 $a=\max|y_1(x)-y_0|$ 来定义一个常数 a，写出

$$|y_1(x)-y_0(x)|\leqslant a.$$

其次，点 $[t, y_1(t)]$ 及 $[t, y_0(t)]$ 在 R' 内，故自(8)可得

$$|f[t, y_1(t)]-f[t, y_0(t)]|\leqslant K|y_1(t)-y_0(t)|\leqslant Ka,$$

于是有

$$|y_2(x)-y_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x} (f[t, y_1(t)]-f[t, y_0(t)])dt\right|$$
$$\leqslant Kah=a(Kh).$$

同样，

$$|f[t, y_2(t)]-f[t, y_1(t)]|\leqslant K|y_2(t)-y_1(t)|\leqslant K^2ah,$$

故

$$|y_3(x)-y_2(x)|=\left|\int_{x_0}^{x} (f[t, y_2(t)]-f[t, y_1(t)])dt\right|$$
$$\leqslant (K^2ah)h=a(Kh)^2.$$

继续这样做，我们得出

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant a(Kh)^{n-1},$$

其中 $n=1, 2, \cdots$. 所以级数(10)的每一项都小于或等于下列常数项级数的对应项:

$$|y_0|+a+a(Kh)+a(Kh)^2+\cdots+a(Kh)^{n-1}+\cdots.$$

但(9)可保证这一级数收敛,故根据比较检验法可知(10)收敛,于是(4)

由于 $y(x)$的图形在 R' 内从而也在 R 内，故由(8)得到

$$\left|y(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt\right|$$
$$\leqslant |y(x)-y_n(x)| + Kh\max|y_{n-1}(x)-y(x)|. \tag{13}$$

现在从 $y_n(x)$一致收敛于 $y(x)$这一事实，可知只要取 n 足够大，就可使得(13)的右边为任意小．因此(13)的左边必等于 0，对于(11)的证明完毕．

为证明(iii)，我们假定 $\bar{y}(x)$也是(2)在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上的一个连续解，然后证明对于区间内的每一个 x 都有 $\bar{y}(x)=y(x)$．要作出所说这个论证，必须知道 $\bar{y}(x)$的图形在 R' 内从而也在 R 内，因此我们的第一步是证明这一事实．让我们假定 $\bar{y}(x)$ 的图形离开 R'（图 80）．于是根据这函数的性质[连续且 $\bar{y}(x_0)=y_0$]，可知必存在这样一个 x_1，使 $|x_1-x_0|<h$, $|\bar{y}(x_1)-y_0|=Mh$, 因而若 $|x-x_0|<|x_1-x_0|$ 则 $|\bar{y}(x)-y_0|<Mh$. 由此可知

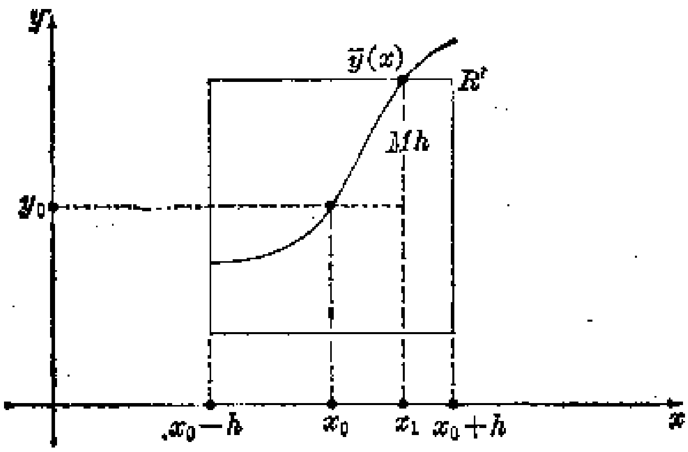


图　80

$$\frac{|\bar{y}(x_1)-y_0|}{|x_1-x_0|}=\frac{Mh}{|x_1-x_0|}>\frac{Mh}{h}=M.$$

然而，根据中值定理，存在 x_0 与 x_1 之间的一个数 x^*，使

$$\frac{|\bar{y}(x_1)-y_0|}{|x_1-x_0|}=|\bar{y}'(x^*)|=|f[x^*, \bar{y}(x^*)]|\leqslant M,$$

这是由于点$[x^*, \bar{y}(x^*)]$在 R' 内的缘故．这一矛盾说明不存在具有 x_1

那种性质的点，故知 $\bar{y}(x)$ 的图形在 R' 内. 为完成对(iii)的证明，我们利用 $\bar{y}(x)$ 及 $y(x)$ 都是(2)的解这一事实，写出

$$|\bar{y}(x)-y(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\{f[t,\bar{y}(t)]-f[t,y(t)]\}dt\right|.$$

由于 $\bar{y}(x)$ 及 $y(x)$ 的图形都在 R' 内，故由(8)得出

$$|\bar{y}(x)-y(x)|\leqslant Kh\max|\bar{y}(x)-y(x)|,$$

故

$$\max|\bar{y}(x)-y(x)|\leqslant Kh\max|\bar{y}(x)-y(x)|.$$

由此可知 $\max|\bar{y}(x)-y(x)|=0$，因为否则就将有 $1\leqslant Kh$ 而与(9)相矛盾. 于是对于区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 内的每一个 x 都有 $\bar{y}(x)=y(x)$，从而毕卡定理完全得到证明.

说明 1. 可以通过减弱条件使这定理在不同方式上得到加强. 例如，对 $\partial f/\partial y$ 在 R 上为连续这个假定太强，并非证明过程所需要，而只是用来得出不等式(8). 因此我们可以把这个不等式引入定理内，来代替关于 $\partial f/\partial y$ 的那个条件. 这样我们就得到定理的更强的一个形式，因为有许多函数并不具有连续的偏导数然而它们对于某个常数 K 可以满足(8). 这个不等式说的是差商

$$\frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2}$$

在 R 上有界，它叫对于变量 y 的**李普希茨条件**①.

说明 2. 若去掉李普希茨条件而只假定 $f(x,y)$ 在 R 上连续，仍可证明

---

① 李普希茨(Rudolf Lipschitz, 1832—1903)大半生在波恩当教授. 他之所以名传后世主要由于他把柯西原来关于微分方程解的存在与唯一性理论加以简化并叙述得更明确. 但他也推广了函数可用其福氏级数表示的狄利克雷定理，得出关于一个正整数能以几种方式表示为几个整数平方和的公式(作为他自己关于整四元数因子分解理论的一个推论)，并在理论力学、变分法、贝塞耳函数、二次微分型以及粘性流体理论方面作出过有用的贡献.

初值问题(1)有一个解．这个结果叫**皮亚诺定理**①．现所知道的证明都需要有比上文更为巧妙复杂的证明②．又这定理保证存在的那个解不一定是唯一的．举个例说，我们来考察下面的问题：

$$y'=3y^{2/3},\quad y(0)=0, \tag{14}$$

并设 R 是矩形 $|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$．这里 $f(x,y)=3y^{2/3}$ 在 R 上仅是连续．又 $y_1(x)=x^3$ 以及 $y_2(x)=0$ 是对于所有 x 都成立的两个不同的解，故(14)肯定具有并非唯一的解．之所以出现这个非唯一性是由于：$f(x,y)$ 在矩形 R 上并不满足李普希茨条件，因为差商

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\frac{3y^{2/3}}{y}=\frac{3}{y^{1/3}}$$

在原点的每一邻域上无界．

说明 3. 定理 A 叫**局部**存在与唯一性定理，因为它只保证在某个区间 $|x-x_0|\leqslant h$(而 h 可能很小)上存在唯一的解．但在几种重要的情况下，这个限制可以去掉．例如，我们来考察一阶线性方程

$$y'+P(x)y=Q(x),$$

其中 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有定义且连续．这里我们有

$$f(x,y)=-P(x)y+Q(x);$$

故若在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上 $K=\max|P(x)|$，则显然有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|-P(x)(y_1-y_2)|\leqslant K|y_1-y_2|.$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 及 $-\infty<y<\infty$ 所定义的无穷直条上为连

① 皮亚诺(Guiseppe Peano, 1858—1932)是意大利逻辑学家兼数学家，深受希尔柏脱以公理法处理平面几何以及怀德海(Whitehead)与罗素(Russell)数理逻辑著作的影响．他关于正整数的公设，曾使好几代学生怀疑整个近世数学究竟是否为故弄玄虚而把明白的道理说得令人难懂(事实并非如此!)．他在 1890 年以作出一个完全充满正方形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 的平面曲线而震惊整个数学界．不幸的是，象他这样一个高度重视逻辑的人，他 1886 年对 $y'=f(x,y)$ 的解的上述存在定理的证明都是不完善的，而满意的证明直到好些年之后才得出．

② 例如可参看 A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin《函数论及泛函分析初步》第一卷．

续且满足李普希茨条件. 在这些情况下，初值问题

$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x_0)=y_0$$

在整个区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有唯一的解. 又点 (x_0, y_0) 可以是直条上的任何一点，不管其为内点与否. 这命题是下一定理的特殊情形.

定理 B. 设 $f(x, y)$ 是在 $a\leqslant x\leqslant b$ 及 $-\infty<y<y$ 所定义的直条上满足李普希茨条件

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant K|y_1-y_2|$$

的连续函数. 若 (x_0, y_0) 是直条里的任一点，则初值问题

$$y'=f(x, y),\quad y(x_0)=y_0 \tag{15}$$

在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有且仅有一个解 $y=y(x)$.

证明. 论证同定理A的证明相似，不过由于这里所论的域上下方无界，使有些地方可有一定程度的简化. 特别是，我们以同样方式出发证明，并说明级数(4)[从而也就是序列(3)]在整个区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛. 作出这一证明时，我们用稍有不同的方法来估计级数(10)的各项的值.

首先，我们定义 M_0, M_1 及 M_2 如下:

$$M_0=|y_0|,\quad M_1=\max|y_1(x)|,\quad M=M_0+M_1,$$

并指出 $|y_0(x)|\leqslant M$ 以及 $|y_1(x)-y_0(x)|\leqslant M$. 其次，若 $x_0\leqslant x\leqslant b$，则可知

$$\begin{aligned}|y_2(x)-y_1(x)|&=\left|\int_{x_0}^{x}\{f[t, y_1(t)]-f[t, y_0(t)]\}dt\right|\\&\leqslant\int_{x_0}^{x}|f[t, y_1(t)]-f[t, y_0(t)]|dt\\&\leqslant K\int_{x_0}^{x}|y_1(t)-y_0(t)|dt\\&\leqslant KM(x-x_0),\\|y_3(x)-y_2(x)|&=\left|\int_{x_0}^{x}\{f[t, y_2(t)]-f[t, y_1(t)]\}dt\right|\\&\leqslant K\int_{x_0}^{x}|y_2(t)-y_1(t)|dt\end{aligned}$$

$$\leqslant K^2M\int_{x_0}^{x}(t-x_0)dt=K^2M\frac{(x-x_0)^2}{2},$$

而一般地有

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant K^{n-1}M\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

这同一论证对于 $a\leqslant x\leqslant x_0$ 也成立，只要把 $x-x_0$ 换成 $|x-x_0|$，于是对于区间里的所有 x，我们有

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant K^{n-1}M\frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\leqslant K^{n-1}M\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!},$$

其中 $n=1, 2, \cdots$. 由此可断言级数(10)的每一项小于或等于收敛的常数项级

$$M+M+KM(b-a)+K^2M\frac{(b-a)^2}{2!}+K^3M\frac{(b-a)^3}{3!}+\cdots$$

的对应项，故(3)在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛于极限函数 $y(x)$.

也同以前一样，由一致收敛可知 $y(x)$ 是(15)在整个区间上的解，因此只要再证明这是唯一这样的解就行了. 假定$\bar{y}(x)$也是(15)在这区间上的一个解. 我们的目标是要证明 $n\to\infty$ 时对于每个 x 都有 $y_n(x)\to\bar{y}(x)$；而由于 $y_n(x)\to y(x)$，从而可知 $\bar{y}(x)=y(x)$. 我们先指出 $\bar{y}(x)$ 是连续函数且满足方程

$$\bar{y}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f[t,\bar{y}(t)]dt.$$

若 $A=\max|\bar{y}(x)-y_0|$，则对于 $x_0\leqslant x\leqslant b$，我们有

$$|\bar{y}(x)-y_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\{f[t,\bar{y}(t)]-f[t,y_0(t)]\}dt\right|$$

$$\leqslant\int_{x_0}^{x}|f[t,\bar{y}(t)]-f[t,y_0(t)]|dt$$

$$\leqslant K\int_{x_0}^{x}|\bar{y}(t)-y_0|dt$$

$$\leqslant KA(x-x_0),$$

$$|\bar{y}(x)-y_2(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\{f[t,\bar{y}(t)]-f[t,y_1(t)]\}dt\right|$$
$$\leqslant K\int_{x_0}^{x}|\bar{y}(t)-y_1(t)|dt$$
$$\leqslant K^2A\int_{x_0}^{x}(t-x_0)dt=K^2A\frac{(x-x_0)^2}{2},$$

而一般地有

$$|\bar{y}(x)-y_n(x)|\leqslant K^nA\frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

对于 $a\leqslant x\leqslant x_0$ 也有类似的结果，故对于区间里的任一 x，我们有

$$|\bar{y}(x)-y_n(x)|\leqslant K^nA\frac{|x-x_0|^n}{n!}\leqslant K^nA\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

由于 $n\to\infty$ 时上式右边趋于 0，故可断言对于区间里的任一 x 有 $\bar{y}(x)=y(x)$，定理证毕.

习　题

1. 设 (x_0, y_0) 是平面里任意一点，并考察初值问题

$$y'=y^2,\qquad y(x_0)=y_0.$$

说明何以定理 A 能保证这问题在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上有唯一的解. 由于 $f(x,y)=y^2$ 及 $\partial f/\partial y=2y$ 在全平面上连续，似乎有理由诱使我们断言这个解对所有 x 都成立. 但若考察通过点 $(0,0)$ 及通过点 $(0,1)$ 的两个解，可知这个结论有时成立有时不成立，因而这样的推断是不合法的.

2. 试证 $f(x,y)=y^{\frac{1}{2}}$
   a. 在矩形 $|x|\leqslant 1$ 及 $0\leqslant y\leqslant 1$ 上并不满足李普希兹条件；
   b. 在矩形 $|x|\leqslant 1$ 及 $c\leqslant y\leqslant d$（其中 $0<c<d$）上并不满足李普希兹条件.
3. 试证 $f(x,y)=x^2|y|$ 在矩形 $|x|\leqslant 1$ 及 $|y|\leqslant 1$ 上满足李普希兹条件，但 $\partial f/\partial y$ 在这矩形的许多点处不存在.
4. 试证 $f(x,y)=xy^2$
   a. 在任一矩形 $a\leqslant x\leqslant b$ 及 $c\leqslant y\leqslant d$ 上满足李普希兹条件；
   b. 在任一直条 $a\leqslant x\leqslant b$ 及 $-\infty<y<\infty$ 上不满足李普希兹条件.
5. 试证 $f(x,y)=xy$
   a. 在任一矩形 $a\leqslant x\leqslant b$ 及 $c\leqslant y\leqslant d$ 上满足李普希兹条件；

b. 在任一直条 $a\leqslant x\leqslant b$ 及 $-\infty<y<\infty$ 上满足李普希兹条件；

c. 在全平面上不满足李普希兹条件.

6. 考察初值问题

$$y'=|y|,\qquad y(x_0)=y_0.$$

a. 对于哪些点 (x_0, y_0)，从定理 A 可知这问题在某区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上有唯一的解？

b. 还有哪些点 (x_0, y_0) 也能使这问题在某区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上确实有唯一的解？

7. 对于哪些点 (x_0, y_0) 从定理A 可知初值问题

$$y'=y|y|,\qquad y(x_0)=y_0$$

在某区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上有唯一的解？

57. 方程组. 二阶线性方程

毕卡的逐次逼近法也可用于一阶方程组. 例如，我们来考察由下列这对一阶方程及初始条件组成的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y,z), & y(x_0)=y_0,\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=g(x,y,z), & z(x_0)=z_0,\end{cases}\tag{1}$$

其中右边都是 xyz 空间里包含点 (x_0, y_0, z_0) 的某个域上的连续函数. 这里左边用微分记号是为了要强调指出 x 是自变量. 这样一个方程组的解，当然是在含点 x_0 的某个区间上都能满足(1)中所规定条件的两个函数 $y=y(x)$ 以及 $z=z(x)$. 如同在单个一阶方程的情形那样，方程组(1)也显然等价于积分方程组

$$\begin{cases}y(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x} f[t, y(t), z(t)]dt,\\ z(x)=z_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x} g[t, y(t), z(t)]dt,\end{cases}\tag{2}$$

意即(1)的解(如果存在)正好就是(2)的连续解. 如果我们从常数函数

$$y_0(x)=y_0 \text{ 及 } z_0(x)=z_0$$

出发试用逐次逼近法来解(2)，则毕卡法的步骤完全同以前一样. 第一

步我们有

$$\begin{cases} y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,y_0(t),z_0(t)]dt, \\ z_1(x)=z_0+\int_{x_0}^{x} g[t,y_0(t),z_0(t)]dt; \end{cases}$$

第二步我们有

$$\begin{cases} y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,y_1(t),z_1(t)]dt, \\ z_2(x)=z_0+\int_{x_0}^{x} g[t,y_1(t),z_1(t)]dt; \end{cases}$$

及以后各步等等．这套做法得出两个函数序列 $y_n(x)$ 及 $z_n(x)$；并且在合适的假定下，容易采用对于定理 56-A 的论证，来证明这两个序列收敛于(1)的一个解，它在某区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上存在，而且是唯一的．

现在我们限于讲线性方程组．这时(1)中的函数 $f(x,y,z)$ 及 $g(x,y,z)$ 是 y 及 z 的线性函数．也就是，我们考虑的是下列形式的一个初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=p_1(x)y+q_1(x)z+r_1(x),\ y(x_0)=y_0, \\ \dfrac{dz}{dx}=p_2(x)y+q_2(x)z+r_2(x),\ z(x_0)=z_0, \end{cases} \tag{3}$$

这里 $p_i(x)$，$q_i(x)$ 及 $r_i(x)$ $(i=1,\ 2)$ 这六个函数是含点 x_0 的一个区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续函数．由于每个函数都在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有界，故存在一常数 K 使 $|p_i(x)|\leqslant K$ 以及 $|q_i(x)|\leqslant K$ $(i=1,2)$．现在容易看出微分方程(3)右边的函数满足下列形式的李普希茨条件

$$|f(x,y_1,z_1)-f(x,y_2,z_2)|\leqslant K(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|)$$

$$|g(x,y_1,z_1)-g(x,y_2,z_2)|\leqslant K(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|).$$

正如在定理 56-B 的证明里那样，这些条件可用来证明(3)在整个区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有唯一的解，详细证明过程我们也不再向读者讲了．

有了所讲关于方程组的这些事实，就有可能对下列基本定理给出一个简单的证明．这定理我们在第三章开头叙述过，并且它对我们关

于二阶线性方程的整个讲解过程中起了虽不显著然而却是关键的作用.

定理A. 设 $P(x)$, $Q(x)$及 $R(x)$ 是一区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续函数. 若 x_0 是这区间里的任一点, 而 y_0 及 y_0' 是任意二数, 则初值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x),\ y(x_0)=y_0 \text{ 及 } y'(x_0)=y_0' \tag{4}$$

在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有且只有一个解 $y=y(x)$.

证明. 若引入新变量 $z=dy/dx$, 则(4)的每一个解显然给出线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z & y(x_0)=y_0\\ \dfrac{dz}{dx}=-P(x)z-Q(x)y+R(x), & z(x_0)=y_0'\end{cases} \tag{5}$$

的一个解, 反之亦然. 但我们知道(5)在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有唯一的解, 故(4)也是那样.

习 题

1. 用毕卡法解下列初值问题, 并将所得结果同精确解进行比较:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z, & y(0)=1,\\ \dfrac{dz}{dx}=-y, & z(0)=0.\end{cases}$$

习题解答

第2节

2. a. $y=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}x^2+c$; c. $y=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$;

   b. $y=\log x+c$; d. $y=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+c$.

3. a. $y=xe^x-e^x+3$; c. $y=x\log x-x$.

   b. $y=\sin^2 x+1$;

第3节

1. a. $x^2-y^2=c$; c. $r=c(1-\cos\theta)$;

   b. $x^2+2y^2=c^2$; d. $y^2=-2x+c$.

2. $y^2=2xy\frac{dy}{dx}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$;

   曲线族是自相正交的，意即，当族中一曲线与族中另一曲线相交时，它们成正交.

3. a. $xy=c$; d. $\theta=0$ or $r=c\sin\theta$;

   b. $y^2=\pm 2x+c$; e. $\theta=\theta_0$ or $r=ce^{k\theta}$.

   c. $y=ce^{\pm x}$;

4. $y=cx^2$.

第4节

1. 若 $B=A$，则 $x=\frac{kA^2abt}{kAabt+1}$;

   而若 $B<A$，则 $x=\frac{AB(1-e^{-k(A-B)abt})}{A-Be^{-k(A-B)abt}}$.

2. $x=x_0e^{kt}$.

3. $x=\frac{x_0x_1}{x_0+(x_1-x_0)e^{-kx_1t}}$.

4. $P=P_0e^{-ch}$.

5. $\frac{\log 5}{\log 2}-1$ 小时.

6. 40 英尺.

第5节

1. $v=\sqrt{\frac{g}{c}}\frac{1-e^{(-2\sqrt{gc})t}}{1+e^{(-2\sqrt{gc})t}}$; 终极速度是$\sqrt{\frac{g}{c}}$.

2. 2英里.

4. $\sqrt{gR}$，约等于5英里/秒.

第一章杂题

1. 午前$(\sqrt{5}-1)$小时.

2. $r=(2-t)/8$; 再经过一个月.

3. $100\log 2$分钟之后.

4. $100(\sqrt{2}-1)$分钟.

5. 圆柱面$x=cy^4$与$4x^2+y^2+4z^2=36$的截线.

7. $14R^{5/2}/(15r^2\sqrt{2g})$秒.

8. 将$y=cx^4$绕y轴旋转而成的曲面形.

9. $25h$.

12. $\sqrt{\frac{4}{g}}\log(4+\sqrt{15})$秒

13. $\frac{dT}{d\theta}=\mu T$; $T=T_0e^{\mu\theta}$.

14. $r=r_0e^{\pi r_0^2 ax/2L}$.

15. 总统的咖啡较热.

16. 朝原点行驶2英里，然后沿螺线 $r=e^{\pm\theta/\sqrt{3}}$之一朝外行驶.

17. $r=\frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\theta}$; 总长$=a$.

第7节

1. a. $y^2=x^2+cx^4$;　d. $\cos\frac{y}{x}+\log cx=0$;

   b. $y=cx^2(x+y)$;　e. $e^{y/x}=\log cx^2$.

   c. $y=x\tan cx^2$;

2. $x^2+y^2=cy$.

3. a. $x+y=\tan(x+c)$;

   b. $\tan(x-y+1)=x+c$.

4. b. $z=dx+ey$.

5. a. $\tan^{-1}\frac{y+5}{x-1}=\log\sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2}+c$;

   b. $y-x=5\log(x+y-1)+c$.

第8节

1. $xy+\log y^2=c$.

2. 非恰当方程.

3. $4xy-x^4+y^4=c$.

4. 非恰当方程.

5. $xy+\sin xy=c$.

6. 非恰当方程.

7. $xe^y+\sin x\cos y=c$.

8. $\cos\dfrac{x}{y}=c$ 或 $\dfrac{x}{y}=c$.

9. 非恰当方程

10. $x^2y^3+y\sin x=c$.

11. $\log\dfrac{1+xy}{1-xy}-2x=c$.

第9节

2. a. $\mu=\dfrac{1}{y^4}, \dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=c$;

b. $\mu=\dfrac{1}{x}, xy-\log x-\dfrac{1}{2}y^2=c$;

c. $\mu=\dfrac{1}{x^3y^3}, -\dfrac{1}{2x^2y^2}+\dfrac{3}{2}y^2=c$.

3. 当$\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/(N-M)$是 $z=x+y$ 的一个函数 $g(z)$时.

4. a. $-\dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{y}+y+c$;

b. $\log\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3}y^3+c$;

c. $\tan^{-1}\dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{4}x^4+c$;

d. $\log\sqrt{x^2+y^2}=\tan^{-1}\dfrac{x}{y}+c$;

e. $\tan^{-1}\dfrac{3y}{x}=3x+c$.

第10节

2. a. $y=x^4+cx^3$;

b. $y=e^{-x}\tan^{-1}e^x+ce^{-x}$;

c. $y=(1+x^2)^{-1}\log(\sin x)+c(1+x^2)^{-1}$;

d. $y=x^2e^{-x}+x^2-2x+2+ce^{-x}$;

e. $y=x^2\csc x+c\csc x$;

f. $y=-x^3+cx^2$.

3. a. $\dfrac{1}{y^2}=-x^4+cx^2$;

b. $y^3=3\sin x+9x^{-1}\cos x-18x^{-2}\sin x-18x^{-3}\cos x+cx^{-3}$.

4. a. $xy^2=e^y+c$; b. $x=ye^y+cy$.

5. $x=y-2+ce^{-y}$.

第11节

1. a. $y^2=c_1x+c_2$;

   b. $x^2+(y-c_2)^2=c_1^2$;

   c. $y=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$;

   d. $y=-\frac{1}{2}x^2-c_1x-c_1^2\log(x-c_1)+c_2$.

2. a. $y=1$或$3y+x^3=3$;

   b. $2y-3=8ye^{3x/2}$.

3. $y=-\log[\cos(x+c_1)]+c_2$.

4. $s=s_0\cos\sqrt{g/4a}\,t$, 周期$=4\pi\sqrt{a/g}$.

第12节

2. $T_0y''=w(s)\sqrt{1+(y')^2}+L(x)$.

3. 抛物线

5. $y=c(e^{ax}+e^{-ax})$，幕的底部在x轴上，索的最低点则在y轴上.

6. 一水平直线或一悬链线.

8. a. $y=\frac{c}{2}\left[\frac{1}{1+k}\left(\frac{x}{c}\right)^{1+k}-\frac{1}{1-k}\left(\frac{x}{c}\right)^{1-k}\right]+\frac{ck}{1-k^2}$, 故免所跑过的距离是 $ck/(1-k^2)$.

   b. $y=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2-c^2}{2c}-c\log\frac{x}{c}\right]$，于是狗能与免接近到小于$\frac{c}{2}+\varepsilon$（其中$\varepsilon>0$为任意数），但不能接近到等于$\frac{c}{2}$.

9. $y=\frac{1}{2}\left(\frac{x^{k+1}}{c^k}-\frac{c^k}{x^{k-1}}\right)$.

   若$a>b(k>1)$，则当$x\to0$时$y\to-\infty$于是船永远靠不上岸.

   若$a=b(k=1)$，则当$x\to0$时$y\to-c/2$，于是船在$(0,-c/2)$处靠岸.

   若$a<b(k<1)$，则当$x\to0$时$y\to0$，船在原点处靠岸.

第13节

1. a. $I=\frac{E_0}{R-kL}e^{-kt}+\left(I_0-\frac{E_0}{R-kL}\right)e^{-Rt/L}$;

   b. $I=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\sin(\omega t-\alpha)+\left(I_0+\frac{E_0L\omega}{R^2+L^2\omega^2}\right)e^{-Rt/L}$,

其中 $\tan\alpha = L\omega/R$.

第二章杂题

1. $y = c_2 e^{c_1 x}$.
2. $xy = \log y + c$.
3. $3\tan^{-1}\frac{y+1}{x-1} = \log[(y+1)^2 + (x-1)^2] + c$.
4. $y\sqrt{x^2+y^2} + x^2\log(y+\sqrt{x^2+y^2}) + y^2 = 3x^2\log x + cx^2$.
5. $3y = 2x^2 + cx^2y^3$.
6. $-\frac{1}{2x^2y^2} = \log\frac{y}{x} + c$.
7. $y^2 = c_2 e^{2x} + c_1$.
8. $xy = x\sin x + \cos x + c$.
9. $y = x\log y + cx$.
10. $ye^x - x^2y^2 = c$.
11. $c_1\tan^{-1}c_1 x = y + c_2$.
12. $y = x^2 + cx$.
13. $y = x\sin x + 2\cos x - 2x^{-1}\sin x + cx^{-1}$.
14. $(3x+2y) + \log(3x+2y)^2 + x = c$.
15. $x\cos(x+y) = c$.
16. $y = \frac{1}{2}(\log x)^2 + c_1\log x + c_2$.
17. $ye^{xy} + \sin x = c$.
18. $(x-y)\log(x-y) = c - y$.
19. $y = xe^{-x^2} + ce^{-x^2}$.
20. $x^2y^2 - 2x^3y - x^4 = c$.
21. $y = x^4(1+x^2)^{-1} + c(1+x^2)^{-1}$.
22. $e^x\sin y + \cos xy = c$.
23. $y = c_1\log(x+\sqrt{1+x^2}) + c_2$.
24. $2xe^y + x^2 + y^2 - 2x^2y = c$.
25. $2xe^x e^{-y} + y^2 = c$.
26. 若 $k_2 \neq k_1$, $y = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$；而若 $k_2 = k_1$, $y = k_1 x_0 t e^{-k_1 t}$.
27. 当 $t = 25$ 时.
28. $ce^{(2/5)x^5} = \frac{y-x}{y+x}$.

29. 燃尽速度$=b\log\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)-\frac{gm_2}{a}$,

$$\text{燃尽高度}=\frac{-gm_2^2}{2a^2}+\frac{bm_2}{a}+\frac{bm_1}{a}\log\frac{m_1}{m_1+m_2}.$$

32. a. 若把恒定引力场所产生的等加速度记为 A, 则 $v=c\left(\frac{1-e^{-2At/c}}{1+e^{-2At/c}}\right)$.

第14节

1. $y=c_1x+c_2+e^x$.

2. a. $y=\frac{1}{2x}$;　c. $y=-\frac{1}{3}\sin x$.

　b. $y=-3x$;

3. a. $x^2y''-2xy'+2y=0$;　　c. $y''+k^2y=0$.

　b. $y''-k^2y=0$;

第15节

2. $y=x+2x^2$.

3. $y=-3e^x+2e^{2x}$.

第16节

2. a. $y=c_1\sin x+c_2\cos x$;

　b. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$.

3. $y=c_1+c_2x^{-2}$.

4. $y=c_1x^2+c_2x^{-2}$.

5. $y=c_1x+c_2\left[\frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1\right]$.

6. $y=c_1x^{-\frac{1}{2}}\sin x+c_2x^{-\frac{1}{2}}\cos x$.

7. a. $y=c_1x+c_2e^x$;　　b. $y=c_1x+c_2x^{-2}$.

8. $y=c_1x+c_2x\int x^{-2}e^{\int xf(x)dx}dx$.

9. $y=c_1e^x+c_2x^2e^x$.

10. $y=c_1e^x+c_2e^x\int e^{[-2x+\int f(x)dx]}dx$.

第17节

1. a. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$;

　b. $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$;

　c. $y=c_1\cos 2\sqrt{2}x+c_2\sin 2\sqrt{2}x$;

d. $y=e^{x}(c_1\cos\sqrt{3}\,x+c_2\sin\sqrt{3}\,x)$;

e. $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$;

f. $y=c_1e^{5x}+c_2e^{4x}$;

g. $y=e^{-x/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{5}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)$

4. a. $y=x^{-1}[c_1\cos(\log x^2)+c_2\sin(\log x^3)]$;

b. $y=c_1x^{-2}+c_2x^{-2}\log x$;

c. $y=c_1x^3+c_2x^{-4}$.

第18节

1. a. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-5x}+\frac{1}{3}e^{4x}$;

b. $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+\sin x$;

c. $y=c_1e^{-5x}+c_2xe^{-5x}+7x^2e^{-5x}$;

d. $y=e^{x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+2+4x+5x^2$;

e. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}-4xe^{-2x}$;

f. $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+2\sin 2x+3\cos 2x$;

g. $y=c_1\sin x+c_2\cos x+x\sin x$;

h. $y=c_1+c_2e^{2x}+2x-3x^2$.

2. $y=c_1\sin kx+c_2\cos kx+\frac{\sin bx}{k^2-b^2}$除非 $b=k$，那时 $y=c_1\sin kx+c_2\cos kx-\frac{x\cos kx}{2k}$.

3. $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+x\sin 2x+2\cos x-1-x+2x^2$.

第19节

1. $y_P=2x+4$.

2. $y_P=-\frac{1}{4}e^{-x}$.

3. a. $y_P=-\frac{1}{4}\cos 2x\log(\sec 2x+\tan 2x)$;

b. $y_P=\frac{1}{2}x^2e^{-x}\log x-\frac{3}{4}x^2e^{-x}$;

c. $y_P=-e^{-x}(8x^2+4x+1)$;

d. $y_P=\frac{1}{2}xe^{-x}\sin 2x+\frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x\log(\cos 2x)$.

4. a. $y=c_1x+c_2(x^2+1)+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{2}x^2$;

b. $y=c_1e^x+c_2x^{-1}-x-1-\frac{1}{3}x^2$.

第 20 节

1. 频率为$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}-\frac{c^2}{2M^2}}$（若$\frac{k}{M}-\frac{c^2}{2M^2}$为正；这比$\frac{k}{M}-\frac{c^2}{4M^2}>0$那个条件的限制性更强.）

3. $2\pi\sqrt{2r/3g}$秒.

4. 往返一次的时间是$2\pi\sqrt{R/g}$秒，这里R是地球半径，所需时间约为90分钟.

第 22 节

3. $u''+\left(1+\frac{1-4p^2}{4x^2}\right)u=0$.

第 23 节

3. 若$f(x)\geqslant 0$而$k>0$则方程$y''+[f(x)+k]y=0$的每个解有无穷多正的零点.

第 24 节

1. a. $\lambda_n=4n^2, y_n(x)=\sin 2nx$;

   b. $\lambda_n=\frac{n^2}{4},\ y_n(x)=\sin\frac{nx}{2}$;

   c. $\lambda_n=n^2\pi^2, y_n(x)=\sin n\pi x$;

   d. $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{L^2}, y_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L}$;

   e. $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{4L^2}, y_n(x)=\sin\frac{n\pi(x+L)}{2L}$;

   f. $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, y_n(x)=\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}$.

第 25 节

6. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

第 26 节

1. a. $y=a_0\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\cdots\right)=a_0e^{x^2}$;

   b. $y=a_0-(a_0-1)\ x+\frac{(a_0-1)}{2!}x^2-\frac{(a_0-1)}{3!}x^3+\cdots$

$$=1+(a_0-1)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)=1+(a_0-1)e^{-x}.$$

2. a. $y=a_1x$, 是一致的.

   b. $y=0, y=ce^{-1/x}$, 后者只在 $c=0$ 时才在 $x=0$ 处是解析的.

3. $\sin^{-1}x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

5. $y=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$

$$=\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+x-1=e^{-x}+x-1.$$

第 27 节

1. $y=a_0\left(1+x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^6-\frac{1}{7}x^8+\cdots\right)+a_1x$

$$=a_0(1+x\tan^{-1}x)+a_1x.$$

2. a. $y_1(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots,$

$$y_2(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3\cdot 5}-\frac{x^7}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots.$$

3. $a_{n+2}=-\frac{(n+1)a_{n+1}-a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$.

   a. $y_1(x)=1+\frac{x^3}{2\cdot 3}-\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots,$

   b. $y_2(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{4x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots.$

4. c. $a_{n+2}=-\frac{p-n}{(n+1)(n+2)}a_n,$

$$w(x)=a_0\left[1-\frac{p}{2!}x^2+\frac{p(p-2)}{4!}x^4-\cdots\right]$$
$$+a_1\left[x-\frac{(p-1)}{3!}x^3+\frac{(p-1)(p-3)}{5!}x^5-\cdots\right].$$

5. b. $y(x)=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)3^n n!}\right]$

$$+a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)3^n n!}\right]$$

   c. $y(x)=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)3^n n!}\right]$

$$+a_1\left[-x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+1)3^n n!}\right].$$

6. a. $y_1(x)=1-\frac{p\cdot p}{2!}x^2+\frac{p(p-2)p(p+2)}{4!}x^4-\cdots,$

$$y_2(x)=x-\frac{(p-1)(p+1)}{3!}x^3+\frac{(p-1)(p-3)(p+1)(p+3)}{5!}x^5-\cdots.$$

第28节

1. a. $x=0$ 是非正则奇异点；$x=1$ 正则奇异点；

   b. $x=0$ 及 $x=1$ 正则奇异点，$x=-1$ 非正则奇异点；

   c. $x=0$ 非正则奇异点；

   d. $x=0$ 及 $x=-\frac{1}{3}$ 正则奇异点.

2. a. 寻常点；

   b. 寻常点；

   c. 正则奇异点；

   d. 正则奇异点；

3. a. $m(m-1)-2m+2=0,\ m_1=2,\ m_2=1;$

   b. $m(m-1)-\frac{5}{4}m+\frac{1}{2}=0,\ m_1=2,\ m_2=\frac{1}{4}.$

4. a. $y_1(x)=x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\cdots\right)=\sin\sqrt{x}.$

   $y_2(x)=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\cdots=\cos\sqrt{x};$

   b. $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}.$

   $y_2(x)=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}=x^{-\frac{1}{2}}e^{x/2};$

   c. $y_1(x)=x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{7}{6}x+\frac{21}{40}x^2+\cdots\right),$

   $y_2(x)=1-3x+2x^2+\cdots;$

   d. $y_1(x)=x\left(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{70}x^2+\cdots\right),$

$$y_2(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left(1-x-\frac{1}{2}x^2+\cdots\right).$$

6. b. $y_2(x)=-xe^{1/x}$.

第29节

1. $y=x^2(1-4x+4x^2+\cdots)$.

2. $y=c_1x^{\frac{1}{2}}e^x+c_2x^{\frac{1}{2}}e^x\log x$.

3. a. $y_1=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots=x^{-1}\sin x,$

$$y_2=x^{-1}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)=x^{-1}\cos x;$$

b. $y_1=x^2\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}x^2-\frac{1}{60}x^3+\cdots\right),$

$$y_2=x^{-1}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots\right);$$

c. $y_1=x^2\left(1-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^8}{5!}-\cdots\right)=\sin x^2,$

$$y_2=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots=\cos x^2.$$

4. $y=x\left(1-\frac{x^2}{2^2 2!}+\frac{x^4}{2^4 2!3!}-\cdots\right).$

5. $y_1=x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)=x^{-\frac{1}{2}}\sin x,$

$$y_2=x^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)=x^{-\frac{1}{2}}\cos x.$$

第30节

2. a. $y=c_1F\left(2,-1,\frac{3}{2},x\right)+c_2x^{-\frac{1}{2}}F\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},x\right)$

$$=c_1\left(1-\frac{4}{3}x\right)+c_2x^{-\frac{1}{2}}F\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},x\right);$$

b. $y=c_1F\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},-x\right)+c_2(-x)^{\frac{1}{2}}F\left(1,\frac{3}{2},\frac{3}{2},-x\right)$

$$=c_1\left(\frac{1}{1+x}\right)+c_2\left[\frac{(-x)^{\frac{1}{2}}}{1+x}\right];$$

c. $y=c_1F\left(2,2,\frac{1}{2},\frac{x+1}{2}\right)+c_2\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{x+1}{2}\right);$

d. $y=c_1F\left(1,1,\frac{14}{5},\frac{3-x}{5}\right)$

$$+c_2\left(\frac{3-x}{5}\right)^{-9/5}F\left(-\frac{4}{5},-\frac{4}{5},-\frac{4}{5},\frac{3-x}{5}\right).$$

4. a. $y=c_1F(p,1,p,x)+c_2x^{1-p}F(1,2-p,2-p,x)$;

b. $y=c_1\left(\frac{1}{1-x}\right)+c_2\left(\frac{x^{1-p}}{1-x}\right)$;

c. $y=c_1\left(\frac{1}{1-x}\right)+c_2\left(\frac{\log x}{1-x}\right)$.

5. $y=c_1F\left(1,-1,-\frac{1}{2},1-e^x\right)+c_2(1-e^x)^{\frac{3}{2}}F\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2},1-e^x\right)$.

第31节

1. a. 指数为 $p+1$ 及 $-p$ 的一个正则奇异点.

b. 一个非正则奇异点.

第32节

2. c. $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$,

$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$,

$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$.

第33节

4. a. $f(x)=\frac{1}{4}P_0(x)+\frac{1}{2}P_1(x)+\frac{5}{16}P_2(x)+\cdots$,

b. $f(x)=\frac{1}{2}(e-e^{-1})P_0(x)+3e^{-1}P_1(x)$

$$+\frac{1}{2}(5e-35e^{-1})P_2(x)+\cdots.$$

第34节

7. $y=x^{-c}[c_1J_p(ax^b)+c_2J_{-p}(ax^b)]$若 p 不是整数;

$y=x^{-c}[c_1J_p(ax^b)+c_2Y_p(ax^b)]$在所有情形下。

第35节

3. $J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)$;

$J_3(x)=\left(\frac{8}{x^2}-1\right)J_1(x)-\frac{4}{x}J_0(x)$;

$J_4(x)=\left(\frac{48}{x^3}-\frac{8}{x}\right)J_1(x)-\left(\frac{24}{x^2}-1\right)J_0(x)$.

第36节

1. a. $\frac{dy}{dx}=z$

$\frac{dz}{dx}=xy+x^2z$;

b. $\frac{dy}{dx}=z$

$\frac{dz}{dx}=w$

$\frac{dw}{dx}=w-x^2z^2$.

2. $\frac{dx}{dt}=v_x$

$\frac{dv_x}{dt}=\frac{f(t,x,y)}{m}$,

$\frac{dy}{dt}=v_y$

$\frac{dv_y}{dt}=\frac{g(t,x,y)}{m}$.

第37节

5. b. $\begin{cases}x=c_1e^{4t}+c_2e^{-2t}\\y=c_1e^{4t}-c_2e^{-2t};\end{cases}$

c. $\begin{cases}x=3e^{4t}+2e^{-2t}\\y=3e^{4t}-2e^{-2t}.\end{cases}$

6. b. $\begin{cases}x=2c_1e^{4t}+c_2e^{-t}\\y=3c_1e^{4t}-c_2e^{-t};\end{cases}$

c. $\begin{cases}x=2c_1e^{4t}+c_2e^{-t}+3t-2\\y=3c_1e^{4t}-c_2e^{-t}-2t+3.\end{cases}$

8. $\begin{cases}x=c_1e^t+c_2te^t\\y=c_2e^t.\end{cases}$

9. a. $\begin{cases}x=c_1e^t\\y=c_2e^t.\end{cases}$

第38节

1. a. $\begin{cases}x=2c_1e^{-t}+c_2e^t\\y=c_1e^{-t}+c_2e^t;\end{cases}$

b. $\begin{cases}x=e^{3t}(2c_1\cos3t+2c_2\sin3t)\\y=e^{3t}[c_1(\cos3t+3\sin3t)+c_2(\sin3t-3\cos3t)];\end{cases}$

c. $\begin{cases}x=-2c_1e^{3t}+c_2(1+2t)e^{3t}\\y=c_1e^{3t}-c_2te^{3t};\end{cases}$

d. $\begin{cases} x = 3c_1 + c_2e^{-2t} \\ y = 4c_1 + 2c_2e^{-2t}; \end{cases}$

e. $\begin{cases} x = c_1e^{2t} \\ y = c_2e^{3t}; \end{cases}$

f. $\begin{cases} x = c_1e^{-3t} + c_2(1-t)e^{-3t} \\ y = -c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t}; \end{cases}$

g. $\begin{cases} x = 2c_1e^{10t} + 3c_2e^{3t} \\ y = c_1e^{10t} - 2c_2e^{3t}; \end{cases}$

h. $\begin{cases} x = e^{3t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t) \\ y = e^{3t}[c_1(\sin 2t - \cos 2t) - c_2(\sin 2t + \cos 2t)]. \end{cases}$

5. b. $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 1. \end{cases}$

第 39 节

1. $x\dfrac{d^2x}{dt^2} = (dx^2 - cx)\dfrac{dx}{dt} + (acx^2 - adx^3) + \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$.
2. 每当兔总数曲线上升时狐总数曲线凹向上.

第 40 节

2. 令 $c = t_1 - t_2$, 并利用唯一性.
3. 两个相图的外形一样，只不过从第一个微分方程组的相图变到第二个微分方程组的相图时，所有路线的方向都要倒过来.
4. a. 相图中每一点都是临界点，所以没有路线.
   b. y 轴上每一点都是临界点，路线是从 y 轴发出朝左及朝右的水平半直线.
   c. 没有临界点，路线是朝右方斜率为 2 的一些直线.
   d. 点 $(0, 0)$ 是唯一的临界点，路线是朝里指向原点并具有一切斜率的所有半直线.
5. 方程(1)及(2)的临界点是 $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, $(\pm 3\pi, 0)$, …, 方程(3)以 $(0, 0)$ 为其唯一临界点.
6. a. $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$; b. $(2, 2)$, $(3, 3)$.
7. $\begin{cases} x = c_1e^t \\ y = c_1e^t + e^t + c_2. \end{cases}$

第 41 节

1. a. (i) 临界点是 x 轴上的点;

(ii) $dy/dx=2xy/(x^2+1)$;

(iii) $y=c(x^2+1)$.

b. (i) (0, 0); (iii) $x^2+y^2=c^2$.

(ii) $dy/dx=-x/y$;

c. (i) 没有临界点;

(ii) $dy/dx=\cos x$;

(iii) $y=\sin x+c$.

d. (i) 临界点是 y 轴上的点;

(ii) $dy/dx=-2xy^2$;

(iii) $y=1/(x^2+c)$ 及 $y=0$.

2. a. (i) $\begin{cases}x=c_1e^t\\ y=c_2e^{-t};\end{cases}$ (iii) $xy=c$;

(ii) $dy/dx=-y/x$; (iv) 非稳定的.

b. (i) $\begin{cases}x=c_1e^{-t}\\ y=c_2e^{-2t}\end{cases}$ (iii) $y=cx^2$;

(ii) $dy/dx=2y/x$; (iv) 渐近稳定的.

c. (i) $\begin{cases}x=2c_1\cos 2t+2c_2\sin 2t\\ y=-c_1\sin 2t+c_2\cos 2t;\end{cases}$

(ii) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x}{4y}$;

(iii) $\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=1$;

(iv) 稳定但非渐近稳定的.

第 42 节

1. a. 非稳定节点;
   b. 渐近稳定螺旋点;
   c. 非稳定鞍点;
   d. 稳定但非渐近稳定的中心点;
   e. 渐近稳定节点;
   f. 临界点不是孤立的;
   g. 非稳定螺旋点.

3. c. 临界点是(−3, 2), 变换后的方程组是

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=2\bar{x}-3\bar{y}\\ \dfrac{d\bar{y}}{dt}=11\bar{x}-8\bar{y},\end{cases}$$

临界点是个渐近稳定节点.

4. a. $m^2+2bm+a^2=0$; $p=2b$, $q=a^2$.

   b. (i) 临界点是一稳定而非渐近稳定的中心点；该质量作振动；位移 x 及速度 $y=dx/dt$ 是时间的周期函数.

   (ii) 临界点是一渐近稳定螺旋点；质量作衰减振动；在愈来愈小的振动过程中 x 及 $\dfrac{dx}{dt}\to 0$.

   (iii) 临界点是一渐近稳定节点；质量不发生振动；在不发生振动的情况下 x 及 $\dfrac{dx}{dt}\to 0$.

   (iv) 同(iii)一样.

5. $a_2x^2-2a_1xy-b_1y^2=c$.

第 43 节

1. a. 两者都不是；　c. 两者都不是；
   b. 正定；　d. 负定.

第 44 节

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2y-y^3}{x^3-2xy^2}$.

3. 令 $D=-pq=(a_1+b_2)(a_1b_2-a_2b_1)>0$.

4. 当非线性方程组(4)的相关线性方程组(3)在(0, 0)处有一中心点时，我们不能对(4)在(0, 0)处的稳定性作出任何结论.

5. a. 非稳定螺旋点；　b. 渐近稳定节点.

6. 临界点(0, 0)在 $\mu>0$ 时是非稳定的，在 $\mu<0$ 时是渐近稳定的.

第 45 节

1. 若 $f(0)=0$ 且对于 $x\neq 0$ 有 $xf(x)<0$，临界点是个非稳定的鞍点.

3. $y^2-x^2+x^4=2E$；$(-\sqrt{2}/2, 0)$是个中心点；$(0, 0)$是个鞍点；$(\sqrt{2}/2, 0)$是个中心点.

4. 当 $z=V(x)$有一极大时，临界点是个鞍点；当它有一极小时，临界点是个中心点；当它有一拐点时，临界点是个尖点.

第 46 节

2. a. $\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=r(4-r^2)\\ \dfrac{d\theta}{dt}=-4;\end{cases}$

c. $\begin{cases}x=\dfrac{2\cos 4(t+t_0)}{\sqrt{1+ce^{-8t}}}\\ y=\dfrac{-2\sin 4(t+t_0)}{\sqrt{1+ce^{-8t}}},\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\cos 4t\\ y=-2\sin 4t.\end{cases}$

4. a. 有一周期解(李那定理);
   b. 无周期解(定理 B);
   c. 无周期解(定理 A);
   d. 无周期解(定理 B);
   e. 有一周期解(李那定理).

第 48 节

1. a. $(x-c_2)^2+y^2=c_1^2$;
   b. $y=c_1\sin(x-c_2)$.

2. $y=\frac{1}{4}(x^2-x)$.

4. a. $c_1=r\cos(\theta-c_2)$; b. 同(a).

第 49 节

3. a. $x=\dfrac{ad}{a^2+b^2+c^2}$, $y=\dfrac{bd}{a^2+b^2+c^2}$, $z=\dfrac{cd}{a^2+b^2+c^2}$.

5. 悬链线 $y+\lambda=c_1\cosh\left(\dfrac{x-c_2}{c_1}\right)$.

第 50 节

3. $L[\sin^2 ax]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+4a^2}\right)$和

$L[\cos^2 ax]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{p}{p^2+4a^2}\right)$;

这两个变换式之和是 1 的变换式$\left(=\dfrac{1}{p}\right)$.

4. a. $\dfrac{10}{p}$; d. $\dfrac{4}{p^2+4}+\dfrac{2}{p+1}$;
   b. $\dfrac{5!}{p^6}+\dfrac{p}{p^2+4}$; e. $\dfrac{6!}{p^7}$.
   c. $\dfrac{2}{p-3}-\dfrac{5}{p^2+25}$;

5. a. $5x^3$; d. $1-e^{-x}$;

b. $2e^{-3x}$; e. $x-\sin x$.

c. $2x^2+3\sin 2x$;

第51节

2. a. $\frac{1}{pe^{ap}}$; c. $\frac{e^p-1-p}{p^2(e^p-1)}$;

b. $\frac{1}{p(e^p-1)}$; d. $\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}$.

第52节

1. a. $\frac{5!}{(p+2)^6}$; c. $\frac{p-3}{(p-3)^2+4}$.

b. $\frac{1}{p+1}-\frac{2!}{(p+1)^3}$;

2. a. $2e^{-2x}\sin 3x$; c. $e^{-x}\cos 2x+e^{-x}\sin 2x$.

b. $2e^{-3x}x^3$;

3. a. $y(x)=-e^{-x}+e^{2x}$;

b. $y(x)=3xe^{2x}$;

c. $y(x)=1-e^{-x}\cos x$;

d. $y(x)=-5+6x-3x^2+x^3+5e^{-x}$;

e. $y(x)=e^{-x}\sin 2x+e^{-x}\sin x$.

4. $y(x)=y_0e^{ax}+(y_0'-ay_0)xe^{ax}$.

5. $1-e^{-x}$.

第53节

1. $L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2+a^2)^2}\right]=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{\sin ax}{a}-x\cos ax\right)$.

2. a. $\frac{6ap^2-2a^3}{(p^2+a^2)^3}$; b. $\frac{3}{4p^2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

3. a. $y(x)=cx^2e^x$; b. $y(x)=xe^{-x}$.

5. a. $\log\frac{b}{a}$; b. $\tan^{-1}\frac{b}{a}$.

8. b. $\frac{1}{p(1+e^{-p})}$.

第54节

2. a. $y(x)=\cos x$; c. $y(x)=e^{-x}(x-1)^2$;

b. $y(x)=e^{2x}$; d. $y(x)=-2\sin x+4\sin 2x$.

4. $y=cx$.

第 55 节

1. $y=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots,\ |x|<1$;

$$y_1(x)=1+x, \qquad y_2(x)=1+x+x^2+\frac{1}{3}x^3,$$

$$y_3(x)=1+x+x^2+x^3+\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{3}x^5+\frac{1}{9}x^6+\frac{1}{63}x^7.$$

2. $y=e^{x^2}-1$;

$$y_1(x)=x^2, \qquad y_2(x)=x^2+\frac{x^4}{2},$$

$$y_3(x)=x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{2\cdot3}.$$

$$y_4(x)=x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{2\cdot3}+\frac{x^8}{2\cdot3\cdot4}.$$

3. a. $y_n(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+e^x\to(e^x-x-1)+e^x$;

b. $y_n(x)=1+x+2\left[\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]$

$\to 1+x+2(e^x-x-1)$;

c. $y_1(x)=(\sin x-x)+1+x+\frac{x^2}{2!}$,

$$y_2(x)=-\left(\cos x-1+\frac{x^2}{2!}\right)+1+x+(x^2)+\frac{x^3}{3!},$$

$$y_3(x)=-\left(\sin x-x+\frac{x^3}{3!}\right)+1+x+\left(x^2+\frac{x^3}{3}\right)+\frac{x^4}{4!},$$

$$y_4(x)=\left(\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}\right)+1+x+\left(x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3\cdot4}\right)+\frac{x^5}{5!}.$$

第 56 节

6. a. 凡 $y_0\neq0$ 的所有的点 (x_0, y_0);

b. 所有的点 (x_0, y_0)，因 $f(x, y)=|y|$ 在每个矩形上都满足李普希兹条件.

7. 对于所有的点 (x_0, y_0).

第 57 节

1. $\begin{cases} y=\cos x \\ z=-\sin x. \end{cases}$